ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

4

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1884.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
38/39 FRANZÖSISCHE STRASSE

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

REDACTION

ACTA MATHEMATICA. 4. 1884.

INHALT. TABLE DES MATIÈRES.

SUR LA REPRÉSENTATION ANALYTIQUE

DES

FONCTIONS MONOGÈNES UNIFORMES

D'UNE VARIABLE INDÉPENDANTE

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

À STOCKHOLM.

Les recherches dont je vais exposer ici l'ensemble, ont été publiées auparavant, quant à leurs traits les plus essentiels, dans le Bulletin (Öfversigt) des travaux de l'Académie royale des sciences de Suède, ainsi que dans les Comptes-rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences à Paris. Leur but est de faire parvenir, dans un certain sens, la théorie des fonctions analytiques uniformes d'une variable, à ce degré d'achèvement auquel la théorie des fonctions rationnelles est arrivée depuis longtemps.

Soit x une grandeur variable complexe à variabilité illimitée, et x' un point donné fini [1] dans le domaine de la variable x. Soit enfin R une quantité positive donnée. Je dis que l'ensemble des points x remplissant la condition $|x - x'| < R$, constitue le *voisinage* ou *l'entourage* ou les *environs du point* x' [2] *correspondant à* R. Chacun de ces points est dit *appartenir au voisinage* ou *à l'entourage* ou *aux environs* R, ou être

---

[1] C'est-à-dire représentant une valeur donnée finie.

[2] Cf.: *Zur Functionenlehre, von* K. Weierstrass. Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880, pag. 4.

situé dans *le voisinage* ou dans *l'entourage* ou dans *les environs* R de x'. Conformément à ce qui précède, l'ensemble des points x remplissant la condition $\left|\frac{1}{x}\right| < R$, sera *le voisinage du point* $x = \infty$ *correspondant à* R. Considérons un ensemble $\mathfrak{A}$ d'un nombre infini de points différents x; je dirai d'abord que l'entourage d'un point appartient à $\mathfrak{A}$, si tout point de cet entourage est un point de $\mathfrak{A}$; maintenant, il peut arriver, relativement à cet ensemble $\mathfrak{A}$, qu'il existe un certain point dont l'entourage, convenablement choisi, appartient tout entier à $\mathfrak{A}$; s'il existe un tel point, je le désignerai par x_0, en prenant toutefois toujours pour x_0 le point ∞, s'il existe un entourage de ce point appartenant à $\mathfrak{A}$. Si, enfin, quelle que soit la valeur finie x_0' appartenant à $\mathfrak{A}$, on peut toujours trouver un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ tels, que dans la série $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, x_0'$ on peut définir pour chaque point un entourage de telle manière que cet entourage appartienne tout entier à $\mathfrak{A}$ et que chaque point suivant appartienne à l'entourage du précédent, je dirai, suivant WEIERSTRASS, que le champ $\mathfrak{A}$ constitue un *continuum composé d'une seule pièce.* [1]

Pour être plus bref, je désignerai fréquemment dans la suite seulement par *continuum* [2] un *continuum* de l'espèce qui vient d'être décrite.

Conformément à la définition qui précède, il existe toujours, pour chaque point x' appartenant à un *continuum* $\mathfrak{A}$, un voisinage correspondant, dont tous les points appartiennent également à $\mathfrak{A}$. En suivant la terminologie employée par WEIERSTRASS dans son cours, je dirai qu'un point pareil est situé *en dedans de* $\mathfrak{A}$, ou que le *continuum* $\mathfrak{A}$ contient ce point. Selon la même terminologie, x' est dit se trouver *sur la limite* de $\mathfrak{A}$, si, parmi les points d'un entourage, si petit qu'il soit, de x', il s'en trouve toujours quelques-uns qui appartiennent et quelques autres qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{A}$; et x' est dit situé *en dehors de* $\mathfrak{A}$, s'il se trouve un voisinage de x' ne comprenant pas de point appartenant à $\mathfrak{A}$. D'après ces définitions, il convient d'entendre, par la *limite complète* de $\mathfrak{A}$, l'ensemble de tous les points situés sur la limite de $\mathfrak{A}$. On peut encore

---

(1) WEIERSTRASS: *Zur Functionenlehre,* p. 5.

(2) Suivant la terminologie de CANTOR (voir ce journal, T. 2, p. 407—408), l'ensemble $\mathfrak{A}$, tant que cet ensemble ne forme qu'une partie du champ total de la variable x, est un ensemble *imparfait continu;* il constitue, par suite, une espèce distincte de *semicontinuum,* mais n'est pas un *continuum parfait.*

dire que $\mathfrak{A}$ est parfaitement limité par l'ensemble de tous les points situés sur la limite.

Soit maintenant $F(x)$ une fonction monogène[1] uniforme de x. Une fonction pareille se comporte d'une façon *régulière*[2] dans le voisinage d'un point x', s'il existe une série procédant suivant les puissances entières et positives de $(x - x')$:

$$A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \ldots,$$

telle, que l'on ait,

$$F(x) = A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \ldots.$$

Cette égalité subsiste nécessairement dans toute l'étendue du domaine de convergence de la série. La définition est également valable pour $x' = \infty$, si l'on entend par $(x - x')$ l'expression $\frac{1}{x}$. Quand $F(x)$ se comporte d'une façon régulière dans l'entourage de deux points x_0 et x'_0, dont $x_0 = \infty$ dans le cas où $x = \infty$ est un point régulier de $F(x)$, il est toujours possible d'interpoler entre eux un nombre fini de points x_r $(r = 1, 2, \ldots, \nu)$, à chacun desquels correspond une série

$$A_0^{(r)} + A_1^{(r)}(x - x_r) + A_2^{(r)}(x - x_r)^2 + \ldots$$

telle, que l'on ait l'égalité

$$F(x) = A_0^{(r)} + A_1^{(r)}(x - x_r) + A_2^{(r)}(x - x_r)^2 + \ldots,$$

et que chaque point se trouve dans le domaine de convergence de la série relative au point précédent. L'ensemble de tous les points dans le voisinage desquels $F(x)$ se comporte d'une façon régulière, forme par conséquent un *continuum* $\mathfrak{A}$ tel qu'il a été défini ci-haut.

---

(1) J'entends alors par fonction *monogène* une fonction telle qu'elle a été définie par WEIERSTRASS: *Zur Functionenlehre.* Monatsbericht d. Königl. Akad. d. Wissenschaften zu Berlin, August 1880, p. 12.

(2) *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, von* K. WEIERSTRASS. Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1876, p. 11.

Considérons maintenant un point x' tel, qu'il existe, dans chaque voisinage de x', des points pour lesquels $F(x)$ se comporte d'une façon régulière, mais pour lequel il n'existe aucun entourage où une égalité de la forme

$$F(x) = A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \ldots$$

ait lieu; on dit alors que x' est un point *singulier* de la fonction $F(x)$, ou aussi que $F(x)$ se comporte d'une façon *singulière* au voisinage du point x'.(¹) L'ensemble de tous les points singuliers de $F(x)$ constitue la limite complète du domaine $\mathfrak{A}$ dans lequel une fonction se comporte régulièrement.

Quand P est un ensemble infini donné, ne contenant qu'une fois chaque point spécial, CANTOR comprend par P' l'ensemble de tous les points tels, qu'il se trouve une infinité de points appartenant à P(²) dans un voisinage aussi rapproché que l'on voudra de chaque point en question. Si P est l'ensemble de tous les points singuliers de $F(x)$, et qu'il constitue en outre un ensemble infini, P contiendra nécessairement tous les points de P'. En effet, lorsque, au voisinage d'un point, aussi petit que l'on voudra, il existe une infinité de points singuliers d'une fonction, ce point est lui-même un point singulier de la fonction.

Soit maintenant P un ensemble quelconque, ne contenant qu'une seule fois chaque point spécial et embrassant de même tous les points de P'. Il peut arriver alors que P contienne des points qui ne sont pas compris en P'. Soit Q l'ensemble de tous ces points. A chaque point de Q appartient toujours, en ce cas, un si petit voisinage, qu'il ne s'y trouve pas d'autres points de Q. On dit alors d'un tel point qu'il est *isolé*. CANTOR(³) désigne par le terme d'*ensemble isolé* tout ensemble dont les points particuliers sont des points isolés qui diffèrent entre eux. En dérivant maintenant par la règle de CANTOR l'ensemble Q' de l'ensemble

(¹) K. WEIERSTRASS: *Zur Theorie* etc., p. 11. La définition qui vient d'être donnée ici, diverge de celle de WEIERSTRASS en ceci que WEIERSTRASS n'ajoute pas la condition que $F(x)$ doive posséder des points réguliers dans chaque voisinage de $x = x'$. En lisant la suite de mon mémoire on reconnaîtra sans peine pourquoi j'ai été amené à faire ce changement dans la définition de WEIERSTRASS.

(²) Voir ce journal, T. 2, p. 343.

(³) Voir ce journal, T. 2, p. 373.

Q, on trouve que Q' est contenu en P', et, par conséquent, qu'il est aussi compris en P. Il est évident que les deux ensembles Q et Q' ne peuvent avoir aucun point commun. Soit S l'ensemble de tous les points qui sont contenus en P sans être compris en même temps ni en Q, ni en Q'. On obtient alors $P = Q + Q' + S$.(1) Un point de S n'étant compris ni en Q, ni en Q', il y a évidemment, à chaque voisinage d'un point pareil, d'autres points qui appartiennent de même à S. L'ensemble S est donc un ensemble tel, qu'il est toujours compris dans l'ensemble S' dérivé de S par la règle de CANTOR.

Supposez maintenant que P soit l'ensemble de tous les points singuliers d'une fonction $F(x)$. Si nous considérons $F(x)$ au voisinage d'un point a de Q, notre fonction pourra toujours, sur la base du théorème de LAURENT,(2) se mettre, dans un certain voisinage de a, sous la forme:

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right) + \mathfrak{P}(x-a),$$

où $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ désigne une série toujours convergente, procédant suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x-a}$, s'annulant quand $\frac{1}{x-a} = 0$, et où $\mathfrak{P}(x-a)$ est une autre série procédant suivant les puissances entières et positives de $(x-a)$, et convergente dans le voisinage précité de $(x=a)$.(3) Il en sera de même pour $a = \infty$, à la condition que l'on entende $\frac{1}{x}$ par $(x-\infty)$.

Étant donné un *continuum* $\mathfrak{A}$ parfaitement limité par un ensemble isolé Q et l'ensemble dérivé Q', mais d'ailleurs arbitraire, adjoignant

---

(1) Un ensemble constituant la réunion de plusieurs autres qui ne possèdent aucun point commun, est désigné comme la somme de ceux-ci. (Voir ce journal, T. 2, p. 372.)

(2) J'ai montré dans les Mémoires de la société des sciences de Liège, 2e série, t. XII comment il est possible de prouver ce théorème sans avoir recours à la théorie des intégrales définies et sans sortir des principes élémentaires employés dans ce travail. Cette démonstration sera reproduite à la suite de ce mémoire.

(3) A l'instar de WEIERSTRASS: *Zur Theorie* etc. p. 26, je comprends toujours par $\mathfrak{P}(x-a)$ »une série procédant suivant les puissances entières et positives de $(x-a)$, et convergente dans un certain voisinage de $(x=a)$».

ensuite arbitrairement à chacun des points a qui constituent l'ensemble Q, une fonction

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right) + g(x-a),$$

où $g(x-a)$ est une fonction rationnelle entière du degré m en $(x-a)$, et $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ une série toujours convergente, procédant suivant les puissances entières et positives de $\frac{1}{x-a}$, et s'évanouissant lorsque $\frac{1}{x-a} = 0$, est-il possible de former une expression analytique correspondante, représentant une fonction monogène et uniforme, qui, pour le voisinage immédiat de $(x = a)$, puisse se mettre sous la forme

$$G\left(\frac{1}{x-a}\right) + g(x-a) + (x-a)^{m+1}.\mathfrak{P}(x-a),$$

et qui, en outre, se comporte régulièrement au voisinage de chaque point situé en dedans du *continuum* $\mathfrak{A}$, parfaitement limité par l'ensemble $Q + Q'$?

Je vais montrer que c'est toujours possible, et qu'il existe une infinité d'expressions analytiques représentant des fonctions qui correspondent tant au *continuum* donné, qu'aux fonctions arbitraires $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ et $g(x-a)$. Je ferai voir aussi que ces expressions peuvent être choisies de façon que la fonction qu'elles représentent ne s'évanouisse que pour des points donnés.

Je montrerai de même qu'une fonction monogène uniforme quelconque $F(x)$ étant donnée il est toujours possible de former une expression analytique correspondante ayant les propriétés indiquées et représentant la fonction considérée avec chaque approximation voulue, même en d'autres points que ceux qui appartiennent à Q.

Il a été supposé que l'ensemble $Q + Q'$ constitue la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$ composé d'une seule pièce. L'ensemble isolé Q peut de même être choisi d'une manière complètement arbitraire, mais l'on obtient alors en général une expression analytique correspondante, représentant, dans des parties différentes du domaine de la variable x, des fonctions monogènes uniformes différentes.

On peut donner de la manière suivante un sens déterminé à ce que l'on entend en disant d'une expression pareille qu'elle se comporte d'une façon régulière au voisinage d'un point donné: Une expression analytique (1) F_x se comporte d'une façon régulière dans l'entourage d'un point $(x = x')$ s'il y a une série

$$A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \dots$$

pour laquelle, en un certain voisinage du point $(x = x')$, a lieu l'égalité

$$F_x = A_0 + A_1(x - x') + A_2(x - x')^2 + \dots .$$

Il n'est toutefois pas nécessaire que cette égalité se produise dans tout le domaine de convergence de la série. WEIERSTRASS (2) a donné en effet des exemples d'expressions analytiques où cette égalité ne subsiste que dans un entourage du point $(x = x')$ constituant une partie de ce domaine de convergence, et où l'expression analytique ne représente par conséquent que des *parties* de différentes fonctions monogènes. Les expressions analytiques qui seront principalement étudiées dans le présent mémoire, ne se comportent cependant pas de cette manière. Ces expressions représentent en général au moins *une* fonction monogène tout entière.

Je me contenterai de signaler, pour terminer, que les différents points d'un ensemble isolé peuvent toujours être ordonnés en une série $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ (3) Pour exprimer cette propriété que la totalité des points appartenant à un ensemble isolé donné peut toujours être arrangée en une série $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$, CANTOR dit que cet ensemble a la même puissance que la série des nombres $1, 2, \dots, \nu, \dots$ (4) Il n'est toutefois pas vrai que chaque ensemble doué d'une telle propriété soit aussi un ensemble isolé. (5) Si un ensemble ne se composant pas d'un nombre fini

---

(1) Pour éviter la confusion qu'on trouve chez beaucoup d'auteurs sur la différence entre une expression analytique et une fonction monogène j'introduis dans la suite le signe F_x pour exprimer la première de ces notions.

(2) Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880 et Februar 1881.

(3) Voir ce journal, T. 2, p. 373.

(4) Voir ce journal, T. 2, p. 311.

(5) Je citerai comme exemple l'ensemble de tous les nombres rationnels.

de points, ne possède pas la même puissance que la série $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$, on dit qu'il a une *autre puissance,* plus élevée que celle de cette série.

On considérera toujours dans ce qui suit $x = \infty$ comme un point dans le domaine de la variable x, la définition de »voisinage de $x = \infty$» faisant comprendre ce que l'on veut signifier en disant que ce point est situé, en dedans, sur la limite, ou en dehors d'un certain domaine; enfin, qu'on le rencontre parmi les points de l'ensemble P', déduit de la façon indiquée ci-haut, d'un ensemble donné P.

§ 1.

Ce paragraphe est consacré au développement d'un théorème principal, servant de base à toute la théorie qui suit.

A. »Soit Q un ensemble isolé appartenant au domaine d'une variable x à variabilité illimitée, et dont les points particuliers seront désignés par $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$. Soit ensuite

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right),\quad G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots, G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right), \ldots$$

une série de fonctions monogènes uniformes, où $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ désigne une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x-a_\nu}$, s'évanouissant lorsque $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$. Il est alors toujours possible de former une expression analytique qui se comporte partout d'une manière régulière, sauf au voisinage de chacun des points appartenant à $Q + Q'$, et qui, pour chaque valeur déterminée de ν, au voisinage de $(x = a_\nu)$, peut être mise sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x - a_\nu).»$$

Si l'ensemble Q ne contient qu'un nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il n'existe pas d'ensemble Q', ce que Cantor exprime par l'égalité $Q' = 0$. Le théorème que j'ai énoncé, ressort presque immédiatement en ce cas.

En effet, si l'on pose:

$$F_1(x) = G_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right), \quad F_2(x) = G_2\left(\frac{1}{x - a_2}\right), \ldots, \quad F_n(x) = G_n\left(\frac{1}{x - a_n}\right),$$

la somme

$$F(x) = C + \sum_{\nu=1}^{n} F_\nu(x)$$

est une fonction monogène uniforme et régulière dans un *continuum* $\mathfrak{A}$, que l'on obtient en excluant l'ensemble Q du domaine de la variable x. Au voisinage de chacun des points a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) appartenant à Q, $F(x)$ peut aussi se mettre sous la forme:

$$F(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x - a_\nu).$$

Il est de même toujours possible, d'autre part, d'exprimer sous la forme

$$F(x) = C + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right),$$

chaque fonction monogène uniforme $F(x)$, dont les points singuliers sont $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Il suffit pour cela, suivant le théorème de LAURENT, de développer $F(x)$ en une série de puissances au voisinage de chaque point a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), d'où l'on obtient une fonction $G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ telle, que la différence

$$F(x) - G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) = \mathfrak{P}(x - a_\nu).$$

La différence

$$F(x) - \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$$

est alors nécessairement une constante donnée en même temps que la fonction $F(x)$. On a donc le théorème suivant, que l'on retrouve dans le mémoire de WEIERSTRASS: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen:*

»Soit Q un ensemble fini dans le domaine de la variable x à variabilité illimitée, dont les points particuliers sont $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Soient ensuite

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots, \quad G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

des fonctions monogènes uniformes, où $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ constitue une fonction entière de $\frac{1}{x-a_\nu}$, qui s'évanouit quand

$$\frac{1}{x-a_\nu} = 0.$$

La somme

$$C + G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right) + G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right) + \ldots + G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

représente en ce cas une fonction monogène uniforme de la variable x, laquelle se comporte d'une manière régulière au voisinage de chaque point n'appartenant pas à l'ensemble Q, et qui, au voisinage de chaque point a_ν appartenant à cet ensemble, peut se mettre sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x-a_\nu).$$

D'autre part, chaque fonction monogène uniforme de x qui se comporte partout d'une manière régulière, sauf au voisinage des points appartenant à l'ensemble Q, peut se mettre sous la forme d'une somme telle que celle qui a été dite.»

Supposons maintenant que l'égalité $Q' = 0$ n'ait pas lieu, et que Q contienne par conséquent un nombre infini de points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$. Il peut être prouvé qu'il est toujours possible, en ce cas, d'adjoindre à chaque point a_ν, qui n'est ni 0 ni ∞, un autre point b_ν, appartenant à Q', et pouvant être choisi de telle sorte, que $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu - b_\nu| = 0$, ou qu'à chaque quantité positive θ corresponde un nombre entier positif n tel, que $|a_\nu - b_\nu| < \theta$ dès que $\nu \geqq n$. Cela n'exclut pas la supposition $b_\nu = \infty$, et l'on entend en ce cas par $(a_\nu - \infty)$ l'expression $\frac{1}{a_\nu}$. Faisons,

en effet, désigner à b, l'un après l'autre, chacun des points appartenant à Q'. Il existe alors toujours, pour chaque ν donné, une limite inférieure ρ_ν du module $|a_\nu - b|$, laquelle n'est ni nulle, ni infinie. On voit également sans peine qu'il se trouve au moins un point b tel, que $|a_\nu - b| = \rho_\nu$. Je choisis arbitrairement un point pareil, que je désigne par b_ν. Soit maintenant θ une quantité positive quelconque. Il ne peut y avoir, parmi les points a_ν, un nombre infini de points $a_{\nu'}$ pour lesquels $\rho_{\nu'}$ soit supérieur ou égal à θ. Car, si c'était le cas, il y aurait toujours du moins un point b' tel, qu'il existât dans chaque voisinage de ce point une quantité infinie de points $a_{\nu'}$. Le point b' appartient à Q', et l'on aurait par suite, contrairement à la supposition admise, une quantité infinie de points $a_{\nu'}$ pour lesquels $|a_{\nu'} - b'|$, et par conséquent aussi $\rho_{\nu'}$, seraient inférieurs à une aussi petite quantité que l'on voudra, et dès lors aussi inférieurs à θ. Il existe donc nécessairement un nombre entier n tel, que $\rho_\nu < \theta$ ou $|a_\nu - b_\nu| < \theta$ dès que $\nu \geqq n$.[1]

Admettons ultérieurement une quantité positive arbitraire $\varepsilon < 1$, et en outre une série infinie de grandeurs

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3, \ldots$$

qui, arbitraires à tous autres égards, sont soumises aux deux conditions d'être toutes des quantités positives et d'avoir une somme finie.

Pour former l'expression analytique cherchée, on peut procéder de la manière suivante. Si $a_\nu = 0$, ou $a_\nu = \infty$, on pose

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right).$$

---

[1] Comme exemple d'un ensemble Q pour lequel l'égalité $Q' = 0$ ne se présente pas, je citerai l'ensemble qui constitue la réunion de tous les points

$$a_{nk} = \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right) \cdot e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Ici Q' se compose évidemment de la réunion de tous les points remplissant la condition $|x| = 1$. Les quantités b_{nk} peuvent être fixées de telle sorte, que $b_{nk} = e^{\frac{2k\pi i}{n+1}}$. On voit immédiatement la signification géométrique de a_{nk}, b_{nk} et Q'.

Si, au contraire, a_ν n'est ni zéro ni infini, il est toujours possible de développer $G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ en une série([1])

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu,$$

qui converge dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < 1$. On entend alors, quand $b_\nu = \infty$, par $\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}$ l'expression $\frac{x}{a_\nu}$. Le coefficient $A_0^{(\nu)}$ est toujours zéro quand b_ν n'est pas ∞, mais il possède en général une valeur différente de zéro quand $b_\nu = \infty$. Or, il existe toujours un nombre entier m_ν égal ou à -1, ou à zéro, ou à un nombre positif, assez grand pour que le module de la série

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu$$

soit $< \varepsilon_\nu$ dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - a_\nu}\right| \leq \varepsilon$. Quand on a trouvé un nombre m_ν pareil, on pose:

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu.$$

Si $m_\nu = -1$, on introduit dans cette expression le terme zéro au lieu de

$$\sum_{\mu=0}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu,$$

de manière à obtenir dans ce cas

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right).$$

([1]) K. Weierstrass: *Zur Functionenlehre.* Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880, p. 7.

La série

$$F_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

est alors une expression pareille à celle dont je voulais prouver l'existence.

En effet, soit x_0 une valeur finie déterminée de x, n'appartenant pas à l'ensemble $Q + Q'$. Il est alors toujours possible de trouver une quantité positive ρ telle, qu'aucune des valeurs de x pour lesquelles $|x - x_0| \leqq \rho$ n'appartienne à $Q + Q'$. Si l'on fait prendre successivement à x toutes les valeurs remplissant la condition $|x - x_0| \leqq \rho$, et que, dans l'expression $|x - b_\nu|$, l'on fasse parcourir à ν la série 1, 2, 3, ..., il existe évidemment une quantité positive l constituant la limite inférieure des valeurs obtenues de cette manière par $|x - b_\nu|$. On a donc, pour les valeurs de x qui remplissent la condition $|x - x_0| \leqq \rho$,

$$|x - b_\nu| \geqq l. \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Posons maintenant $\theta = \varepsilon l$. Il existe toujours, comme nous l'avons vu, un nombre entier positif n tel, que $|a_\nu - b_\nu| < \theta$ dès que $\nu \geqq n$. Par suite, l'on a aussi, pour $\nu \geqq n$,

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \frac{\theta}{l} = \varepsilon.$$

Rappelons-nous maintenant que

$$|F_\nu(x)| = \left|G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu\right| \leqq \varepsilon_\nu$$

dès que

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon,$$

et que la série $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$ possède une somme finie. On voit dès lors immédiatement que si δ est une quantité positive arbitraire,

il est toujours possible de choisir le nombre n assez grand pour que l'on ait:

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon;$$

$$|F_\nu(x)| < \varepsilon_\nu;$$

$$\sum_{\mu=\nu}^{\infty} |F_\mu(x)| < \delta,$$

à la condition

$$\nu \geq n \text{ et } |x - x_0| \leq \rho.$$

La série $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ est donc uniformément convergente pour le domaine $|x - x_0| \leq \rho$. Chacune des fonctions $F_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ peut aussi pour ce même domaine être mise sous la forme d'une série $\mathfrak{P}(x - x_0)$. L'on a donc, en vertu d'un théorème[1] connu, pour $|x - x_0| \leq \rho$,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) = \mathfrak{P}(x - x_0).$$

On voit immédiatement qu'il en est de même quand $x_0 = \infty$, sans que ce point appartienne à $Q + Q'$, pourvu que l'on introduise $\frac{1}{x}$ à la place de $(x - x_0)$.

Soit maintenant a_λ l'un des points dont l'ensemble est Q. Prenons la quantité positive ρ assez petite, pour que, à l'exception de $(x = a_\lambda)$, aucune des valeurs de x pour lesquelles $|x - a_\lambda| \leq \rho$ n'appartienne à l'ensemble $Q + Q'$.

De la même manière que lorsqu'il s'agissait plus haut de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ pour le domaine $|x - x_0| \leq \rho$, on comprendra sans peine que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) - F_\lambda(x)$ est uniformément convergente pour le domaine $|x - a_\lambda| \leq \rho$, et l'on obtiendra ainsi

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) - F_\lambda(x) = \mathfrak{P}(x - a_\lambda).$$

[1] K. Weierstrass: *Zur Functionenlehre*, p. 7.

d'où suit à son tour

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) = G_\lambda\left(\frac{1}{x - a_\lambda}\right) + \mathfrak{P}(x - a_\lambda).$$

Il en est aussi évidemment de même de $(a_\lambda = \infty)$.

J'ai donc prouvé que l'expression analytique

$$F_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

possède les propriétés indiquées dans mon théorème.

La série

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu$$

donnée plus haut, est convergente dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < 1$. Il en suit qu'il est toujours possible de trouver un nombre m_ν assez grand pour que

$$\left|\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu\right| < \varepsilon_\nu$$

tant que x remplit la condition $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon < 1$. Comme il a déjà été dit, j'entends ici par $\frac{a_\nu - \infty}{x - \infty}$ l'expression $\frac{x}{a_\nu}$.

Je vais maintenant donner une méthode très simple pour le calcul de m_ν. On suppose à cet effet que les points a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, de même que les fonctions

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$$

ont été choisis arbitrairement dans les limites données.

Je pose:

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{x-a_\nu} + \frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^2} + \frac{c_{-3}^{(\nu)}}{(x-a_\nu)^3} + \dots$$

Je suppose en outre que a_ν n'est ni zéro, ni infini.

Si b_ν est une quantité finie, on obtient les coefficients $A^{(\nu)}$ par le système d'égalités:

$$A_0^{(\nu)} = 0$$

$$A_1^{(\nu)} = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu - b_\nu}$$

$$A_2^{(\nu)} = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu - b_\nu} + \frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(a_\nu - b_\nu)^2}$$

$$A_3^{(\nu)} = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu - b_\nu} + \frac{2}{\underline{|1}}\,\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(a_\nu - b_\nu)^2} + \frac{c_{-3}^{(\nu)}}{(a_\nu - b_\nu)^3}$$

. . . .

. . . .

$$A_\mu^{(\nu)} = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu - b_\nu} + \frac{\mu-1}{\underline{|1}}\,\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(a_\nu - b_\nu)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{\underline{|2}}\,\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{(a_\nu - b_\nu)^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-[r-1])}{\underline{|r-1}}\cdot\frac{c_{-r}^{(\nu)}}{(a_\nu - b_\nu)^r} + \dots$$

. . . .

. . . .

et si b_ν est infini on obtient les mêmes coefficients par le système d'égalités

$$A_0^{(\nu)} = -\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu} + \frac{c_{-2}^{(\nu)}}{a_\nu^2} - \frac{c_{-3}^{(\nu)}}{a_\nu^3} + \ldots + (-1)^r . \frac{c_{-r}^{(\nu)}}{a_\nu^r} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1^{(\nu)} = -\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu} + 2\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{a_\nu^2} - 3\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{a_\nu^3} + \ldots + (-1)^r . r . \frac{c_{-r}^{(\nu)}}{a_\nu^r} + \ldots\ldots\ldots$$

$$A_2^{(\nu)} = -\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu} + 3\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{a_\nu^2} - 6\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{a_\nu^3} + \ldots + (-1)^r . \frac{r(r+1)}{\underline{|2}} . \frac{c_{-r}^{(\nu)}}{a_\nu^r} + \ldots$$

. . . .

. . . .

$$A_\mu^{(\nu)} = -\frac{c_{-1}^{(\nu)}}{a_\nu} + \frac{\mu+1}{\underline{|1}}\frac{c_{-2}^{(\nu)}}{a_\nu^2} - \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{\underline{|2}}\frac{c_{-3}^{(\nu)}}{a_\nu^3} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^r \frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+r-1)}{\underline{|r-1}}\frac{c_{-r}^{(\nu)}}{a_\nu^r} + \ldots$$

. . . .

. . . .

La suite $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ étant, par rapport aux puissances de $\frac{1}{x-a_\nu}$, une série à convergence absolue et illimitée, la somme

$$\frac{|c_{-1}^{(\nu)}|}{\xi_\nu} + \frac{|c_{-2}^{(\nu)}|}{\xi_\nu^2} + \frac{|c_{-3}^{(\nu)}|}{\xi_\nu^3} + \ldots,$$

où la quantité ξ_ν peut être une quantité positive quelconque, possède toujours une valeur positive finie, qui peut être désignée par $g_\xi^{(\nu)}$. On aura donc $|c_{-r}^{(\nu)}| \leq g_\xi^{(\nu)} \xi_\nu^r$. Quand b_ν est fini, on obtiendra par conséquent

$$|A_\mu^{(\nu)}| \leq \frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \xi_\nu}{|a_\nu - b_\nu|} \cdot \left(1 + \frac{\xi_\nu}{|a_\nu - b_\nu|}\right)^{\mu-1},$$

et, dans le cas où b_ν est infini:

$$|A_\mu^{(\nu)}| \leqq \frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \xi_\nu}{|a_\nu|} \cdot \left(1 - \frac{\xi_\nu}{|a_\nu|}\right)^{-\mu-1}.$$

Posons maintenant deux quantités positives, α et β, remplissant les conditions

$$\beta < 1, \quad (1 + \alpha)\varepsilon < 1, \quad \frac{\varepsilon}{1 - \beta} < 1.$$

Il existe toujours une quantité positive ε', telle que

$$(1 + \alpha)\varepsilon < \varepsilon' < 1, \quad \frac{\varepsilon}{1 - \beta} < \varepsilon' < 1.$$

Choisissons ensuite, ce qui est toujours possible, les quantités ξ_ν correspondant à une quantité finie b_ν, de telle sorte que $\frac{\xi_\nu}{|a_\nu - b_\nu|} < \alpha$, et les quantités ξ_ν correspondant à $b_\nu = \infty$, de façon que $\frac{\xi_\nu}{|a_\nu|} < \beta$.

Quand b_ν est une quantité finie, et que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon$, on aura donc

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} |A_\mu^{(\nu)}| \cdot \left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right|^\mu \leqq \frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot \varepsilon'^{m_\nu+1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon'}.$$

Si, au contraire, $b_\nu = \infty$, et si $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < \varepsilon$, on obtient

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} |A_\mu^{(\nu)}| \cdot \left|\frac{x}{a_\nu}\right|^\mu \leqq \frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \beta}{1 - \beta} \cdot \varepsilon'^{m_\nu+1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon'}.$$

On n'aura donc qu'à choisir le nombre m_ν de façon que, dans le premier cas,

$$\frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \alpha}{1 + \alpha} \cdot \varepsilon'^{m_\nu+1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon'} < \varepsilon_\nu,$$

et, dans le second cas,

$$\frac{g_\xi^{(\nu)} \cdot \beta}{1 - \beta} \cdot \varepsilon'^{m_\nu+1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon'} < \varepsilon_\nu;$$

qu'à poser ensuite

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu,$$

quand a_ν est une quantité finie qui n'est pas zéro, et

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right),$$

lorsque a_ν est zéro ou infini, et à faire enfin

$$F_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x),$$

pour obtenir en F_x une expression analytique ayant les propriétés indiquées dans mon théorème.

La grande latitude que l'on possède dans le choix des quantités ε, ε_1, ε_2, $\varepsilon_3, \ldots$ et, dans certains cas, b_1, b_2, $b_3, \ldots$, laisse une infinité de moyens divers de former une pareille expression jouissant des propriétés requises.

Soient maintenant F_x une certaine expression de l'espèce considérée, et G_x une autre expression analytique se comportant d'une façon régulière, du moins au voisinage de chaque point n'appartenant pas à l'ensemble Q', mais pouvant être prise d'une manière parfaitement arbitraire à tous autres égards.

Ces deux choses-ci sont alors évidentes, savoir: que

$$\bar{F}_x = F_x + G_x$$

possède toujours les propriétés indiquées dans mon théorème, et que toutes les expressions analytiques jouissant de ces mêmes propriétés peuvent également être mises sous une forme pareille.

Si l'on met G_x sous la forme $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$, où, du moins au voisinage de chaque point n'appartenant pas à Q', chacune des fonctions

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots, f_\nu(x), \ldots$$

se comporte d'une façon régulière et $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)$ converge d'une manière uniforme, $\overline{F}_x$ pourra s'écrire

$$\overline{F}_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \{F_\nu(x) + f_\nu(x)\}.$$

On obtient p. ex. une expression pareille $\overline{F}_x$ en posant

$$f_\nu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu,$$

où $f_\nu(x)$ est une série toujours convergente par rapport aux puissances de $\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}$, et où $|f_\nu(x)| < \varepsilon'_\nu$ dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leq \varepsilon'$, ε' et $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_\nu, \ldots$ étant des quantités positives, et la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon'_\nu$ étant convergente.

On trouvera l'exposé et la démonstration du théorème qui vient d'être développé, dans le Bulletin (Öfversigt) des travaux de l'Académie royale des sciences de Suède pour le 7 Juin 1876, avec cette restriction cependant, que Q' ne contient que le point $x = \infty$, et que les fonctions

$$G_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x - a_2}\right), \ldots, \quad G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right), \ldots$$

sont toutes des fonctions entières rationnelles. La démonstration dont je me suis servi à cette occasion-là, est toutefois différente à plusieurs égards de celle que je viens de donner. Quant à cette dernière, elle est conforme, dans des points essentiels, à celle employée par WEIERSTRASS dans son mémoire: »*Ueber einen functionentheoretischen Satz des Herrn* G. MITTAG-LEFFLER». (Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880.) J'avais déjà exposé la même démonstration dans mon cours à l'université d'Helsingfors (Finlande) au commencement de l'année 1879.[1] J'ai exposé ce fait que mon

---

[1] Voir outre le mémoire de WEIERSTRASS déjà cité, les mémoires suivants:
»ULISSE DINI. *Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa.* In me-

théorème est également valable quand Q' continue à se composer du seul point $x = \infty$, mais que les

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

sont des fonctions entières *transcendantes*, dans le Bulletin (Öfversigt) des travaux de l'Académie royale des sciences de Suède pour le 12 Décembre 1877, et je l'ai démontré dans le Bulletin du 8 Février 1882 de la même Académie, ainsi que dans les Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences de France, 13 Février 1882.(1)

Dans ce qui précède, l'ensemble Q a pu être fixé arbitrairement. Si l'on exclut du champ de la variable x l'ensemble $Q + Q'$, il reste toujours un nombre de *continua* différents entre eux, et dont chacun se compose d'une seule pièce. L'ensemble de tous ces *continua* est un ensemble fini, ou possède la même puissance que la série des nombres $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$.(2) Si l'on entend par $\mathfrak{A}$ un de ces *continua*, on peut montrer que l'expression F_x constitue toujours en dedans de $\mathfrak{A}$ la même fonction monogène. En effet on a le théorème: »Une expression analytique, qui se comporte d'une manière régulière au voisinage de chaque point appartenant à un *continuum* composé d'une seule pièce, représente toujours en dedans de ce *continuum* une même fonction monogène et uniforme». Ce théorème est une conséquence immédiate de la définition qui a été donnée aux expressions de »se comporter d'une manière régulière au voisinage d'un point», et »être un *continuum* composé d'une seule pièce».

---

moriam DOMINICI CHELINI Collectanea Mathematica nunc primum edita cura et studio L. CREMONA et E. BELTRAMI.»

»CH. HERMITE. *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* Extrait d'une lettre de M. HERMITE à M. MITTAG-LEFFLER. Acta Societatis Scientiarum Fennicæ, T. XII», ainsi que »Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 91».

»E. SCHERING. *Das Anschliessen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen.* Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. XXVII.»

(1) Voir aussi: F. CASORATI. *Aggiunte a recenti lavori dei Sig[ri] WEIERSTRASS e MITTAG-LEFFLER sulle funzioni di una variabile complessa.* Annali di Matematica pura ed applicata. Serie II[a]. Tomo X[o].»

(2) Voir ce journal, T. 2, p. 366.

Mettons maintenant que la limite complète du *continuum* $\mathfrak{A}$ dont j'ai parlé ci-dessus, consiste en un ensemble $Q_1 + Q'_1$, où Q_1 est un ensemble isolé contenu en Q, et tel, qu'aucune des fonctions

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

correspondant à un point a_ν de Q_1 ne disparaisse identiquement. La fonction constituée par F_x en dedans de $\mathfrak{A}$ est alors une fonction monogène et uniforme qui ne peut pas être continuée au delà de $\mathfrak{A}$. C'est ce qui suit immédiatement de cette circonstance que chaque point de Q_1 est un point singulier de la fonction et que, par conséquent, chaque point de Q'_1 est aussi un point singulier.

C'est une question de grand intérêt que de savoir si chacun des autres *continua* restant après que l'ensemble $Q + Q'$ a été exclu du champ de la variable x, constitue de même une fonction monogène et uniforme qui ne peut pas être continuée au delà de ce *continuum*. Cette question ne sera toutefois pas traitée ici.

Mais je ferai observer que si l'on apporte au choix de Q cette restriction que l'ensemble $Q + Q'$ doit constituer la limite complète d'un *continuum* composé d'une seule pièce, on obtient, au lieu du théorème **A**, le théorème suivant:

B. »Soit Q un ensemble isolé dans le domaine de la variable x choisi de telle sorte, que $Q + Q'$ constitue la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$. Soient ensuite $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ tous les points de l'ensemble Q, et

$$G_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x - a_2}\right), \ldots, G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right), \ldots$$

une série de fonctions monogènes uniformes, où $G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ désigne une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x - a_\nu}$, qui s'évanouit lorsque

$$\frac{1}{x - a_\nu} = 0,$$

sans toutefois être identiquement nulle: Il est toujours possible de former

une expression analytique représentant une fonction monogène uniforme, laquelle se comporte d'une manière régulière au voisinage de chaque point situé en dedans de $\mathfrak{A}$, et qui, dans un entourage suffisamment petit d'un point a_ν appartenant à Q, peut être mise sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x - a_\nu).$$

Chaque point de $Q + Q'$ est un point singulier de cette fonction.»

Il a été montré de quelle manière on peut toujours former une expression analytique qui représente, en dedans de $\mathfrak{A}$, une fonction pareille. Si le *continuum* $\mathfrak{A}$ est tel qu'il existe des points situés en dehors de ce *continuum*, l'expression $\bar{F}_x$ a toutefois, même pour chacun de ces points, une signification déterminée, et s'y comporte d'une façon régulière. Les valeurs que $\bar{F}_x$ reçoit en de tels points situés en dehors de $\mathfrak{A}$, appartiennent néanmoins à d'autres fonctions que celle qui est constituée par $\bar{F}_x$ en dedans de $\mathfrak{A}$.[1] Si maintenant l'on supprime la condition que $\bar{F}_x$ doit se comporter d'une façon régulière même pour les points situés en dehors de $\mathfrak{A}$, il est possible d'indiquer, pour une expression pareille, une loi de formation encore plus générale que celle donnée précédemment. Cette condition manque aussi évidemment de toute signification.

---

[1] Si l'on part de l'ensemble Q donné dans l'exemple de la note page 11, et que l'on suppose qu'aucune des fonctions $G_{nk}\left(\frac{1}{x - a_{nk}}\right)$ n'est identiquement zéro, l'expression analytique $\bar{F}_x$ correspondant à l'ensemble Q et aux fonctions $G_{nk}\left(\frac{1}{x - a_{nk}}\right)$, représente, dans un cercle ayant l'origine pour centre et l'unité pour rayon, une certaine fonction monogène et uniforme qui se comporte d'une manière singulière dans l'entourage de chacun des points

$$a_{2p\,k} = \left(1 - \frac{1}{2p + 1}\right) e^{\frac{2k\pi i}{2p+1}} \qquad p = 0, 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots, 2p$$

ainsi qu'aux environs des points situés sur la périphérie du cercle. Cette fonction est régulière au voisinage de chaque autre point appartenant au cercle. Elle ne peut pas être continuée au delà du cercle.

L'expression analytique $\bar{F}_x$ représente aussi une autre fonction monogène uniforme

s'il s'agit simplement, soit de déduire, de certains éléments de détermination donnés, une fonction monogène, uniforme et régulière en dedans de $\mathfrak{A}$, soit aussi de trouver une telle expression d'une fonction monogène et uniforme donnée, que cette expression indique immédiatement la valeur de la fonction qui correspond à une valeur d'argument donnée.

Supposons par conséquent que le domaine $\mathfrak{A}$ soit tel qu'il existe des points situés en dehors.

Soient, dans ce cas, b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ des points situés en dehors de $\mathfrak{A} + Q$ ou sur la limite même de ce domaine, et désignons successivement par b les divers points appartenant à l'ensemble Q', ou, en d'autres termes, constituant la limite de $\mathfrak{A} + Q$. Entendons ensuite par β_ν la limite inférieure de $|b - b_\nu|$. Figurons-nous ultérieurement que nos points b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ont été choisis de manière que la limite supérieure des quantités β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ soit une quantité finie déterminée β, et que

$$\lim_{\nu=\infty} (|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0,$$

ou que, à chaque quantité positive θ, réponde un nombre entier positif n, tel que $|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu < \theta$ dès que $\nu \geqq n$.

Le cas où $b_\nu = \infty$ n'est pas exclu dans le précédent, mais alors $a_\nu - \infty$ signifie $\frac{1}{a_\nu}$, et $b - \infty$ signifie $\frac{1}{b}$.

Si l'on choisit, dans l'ensemble Q', les points b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de la même manière qu'à la page 11, la totalité de ces conditions sera remplie. Les quantités β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seront en ce cas toutes égales à zéro.

---

n'existant qu'en dehors du cercle mentionné, et qui ne peut par conséquent se continuer dans l'intérieur de ce cercle. Cette fonction se comporte d'une façon singulière au voisinage de chacun des points

$$a_{2p-1\,k} = \left(1 + \frac{1}{2p}\right) e^{\frac{2k\pi i}{2p}} \qquad p=1,2,\ldots;\; k=0,1,2,\ldots,2p-1$$

comme aussi dans l'entourage de chacun des points situés sur la périphérie du cercle.

Pour la première fonction, $\mathfrak{A} + Q$ est égal à l'intérieur d'une surface circulaire ayant l'origine pour centre et l'unité pour rayon. Pour la fonction mentionnée en dernier lieu, $\mathfrak{A} + Q$ est égal à la partie du plan tombant en dehors de la surface précitée. Pour les deux fonctions, la périphérie du cercle est égale à Q'.

On verra toutefois sans peine comment il est possible d'indiquer des cas où les quantités b_ν peuvent être choisies aussi d'une autre manière, de façon à remplir les conditions données. Soit, p. ex., comme c'est le cas de la première des fonctions mentionnées dans la note de la page précédente, le domaine $\mathfrak{A} + Q$ l'intérieur d'une ligne circulaire, elle-même égale à Q', et ayant $x = 0$ pour centre. Si l'on met alors $b_\nu = \infty$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, la totalité des conditions indiquées sera remplie. Ou aussi, comme c'est le cas de la dernière des fonctions données dans la note de la page précédente, soit $\mathfrak{A} + Q$ l'extérieur d'une ligne circulaire égale à Q', et dont le centre est $x = 0$. Toutes les conditions seront remplies, si l'on pose $b_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Fixons, maintenant, exactement de la même manière qu'en formant l'expression F_x du théorème $\boldsymbol{A}$, la série $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$, où chaque terme est une quantité positive, et où la somme de tous les termes a une valeur finie déterminée; mais, au lieu de la quantité $\varepsilon < 1$, introduisons une série infinie de grandeurs positives $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(\nu)}, \ldots$ soumises à la condition $\lim \varepsilon^{(\nu)} = 1$. Formons ensuite les fonctions $F_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ comme auparavant, mais avec la modification que les nombres m_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seront maintenant choisis de telle sorte, que le module de la série

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu$$

soit inférieur à ε_ν, dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon^{(\nu)}$, tandis que m_ν n'avait besoin auparavant que de remplir la condition

$$\left|\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu\right| < \varepsilon_\nu,$$

dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon$.

La série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ représente alors une fonction monogène uniforme et régulière en dedans de $\mathfrak{A}$, jouissant des propriétés indiquées au théorème $\boldsymbol{B}$.

La preuve peut être donnée exactement de la même manière que lorsque les fonctions $F_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ avaient été déduites d'après le mode de formation plus spécial indiqué auparavant, si l'on a réussi toutefois à établir préalablement qu'il existe toujours un nombre entier positif n tel que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon^{(\nu)}$, dès que $\nu \geqq n$, quand $|x - x_0| \leqq \rho$, où x_0 est un point donné de $\mathfrak{A}' + Q$, et où ρ a été choisi de telle sorte, qu'il n'existe pas, dans le domaine $|x - x_0| \leqq \rho$, d'autre point appartenant à l'ensemble $Q + Q'$ que le point x_0 tout au plus.

On peut démontrer de la manière suivante qu'il existe toujours un nombre n de l'espèce indiquée ci-haut. Si l'on fait prendre successivement à x toutes les valeurs pour lesquelles $|x - x_0| \leqq \rho$, et que l'on fasse parcourir en outre à ν la série des nombres $1, 2, 3, \ldots$ dans l'expression $|x - b_\nu| - \beta_\nu$, il existera nécessairement une quantité positive déterminée l, constituant la limite inférieure de

$$|x - b_\nu| - \beta_\nu.$$

On aura donc

$$|x - b_\nu| \geqq \beta_\nu + l,$$

dès que $|x - x_0| \leqq \rho$. Vu la manière dont les quantités b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ ont été fixées, il existe toujours, quand $\theta < l$ est une quantité positive déterminée, un nombre entier positif n' tel, que

$$|a_\nu - b_\nu| < \beta_\nu + \theta,$$

dès que $\nu \geqq n'$. Par conséquent,

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \frac{\theta + \beta_\nu}{l + \beta_\nu}.$$

Or, β constituant la limite supérieure de β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, on a

$$\frac{\theta + \beta_\nu}{l + \beta_\nu} \leqq \frac{\theta + \beta}{l + \beta}.$$

et par suite

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \frac{\theta + \beta}{l + \beta}.$$

Vu la condition $\lim \varepsilon^{(\nu)} = 1$; attendu, en outre, que β est une quantité

finie déterminée, et que $\theta < l$, il est toujours possible de trouver un nombre entier positif n'' tel que

$$\frac{\theta + \beta}{l + \beta} < \varepsilon^{(\nu)}, \text{ dès que } \nu \geqq n''.$$

Or, si l'on désigne par n le plus grand des deux nombres n' et n'', on aura par conséquent

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon^{(\nu)}, \text{ dès que } \nu \geqq n.$$

Nous avons donc obtenu, dans la nouvelle série

$$F_x = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x),$$

une expression qui représente en dedans de $\mathfrak{A}$ une fonction $F(x)$ ayant les propriétés indiquées au théorème ***B***. Si, maintenant, l'on entend par $G(x)$ une fonction monogène, uniforme et régulière en dedans de $\mathfrak{A} + Q$, mais arbitraire à tous autres égards,

$$\overline{F}(x) = F(x) + G(x)$$

a évidemment à tous égards les mêmes propriétés que celles qui ont été démontrées appartenir à $F(x)$, et, d'autre part, sous la forme $\overline{F}(x)$ sont comprises toutes les fonctions qui possèdent ces propriétés.

Pour obtenir les nombres m_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$), on peut employer avec une modification insignifiante la même méthode que dans le théorème ***A***. Au lieu des deux quantités fixes α et β, il suffit en effet d'introduire les quantités

$$\frac{\xi_\nu}{|a_\nu - b_\nu|} = \alpha_\nu,$$

et $\qquad\qquad\qquad\qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{\xi_\nu}{|a_\nu|} = \beta_\nu.$$

On choisit ensuite les quantités ξ_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) de telle sorte que

$$(1 + \alpha_\nu)\varepsilon^{(\nu)} < 1, \text{ et } \frac{\varepsilon^{(\nu)}}{1 - \beta_\nu} < 1.$$

A chaque indice ν correspond un nombre positif $\varepsilon^{(\nu)'}$ tel que

$$(1 + \alpha_\nu)\varepsilon^{(\nu)} < \varepsilon^{(\nu)'} < 1, \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon^{(\nu)}}{1 - \beta_\nu} < \varepsilon^{(\nu)'} < 1.$$

Si b_ν est une quantité finie, on choisit maintenant le nombre m_ν tel que

$$\frac{g_\varepsilon^{(\nu)} \cdot \alpha_\nu}{1 + \alpha_\nu} \cdot \left(\varepsilon^{(\nu)'}\right)^{m_\nu + 1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon^{(\nu)'}} < \varepsilon_\nu,$$

et si $b_\nu = \infty$, on choisit m_ν de manière que

$$\frac{g_\varepsilon^{(\nu)} \cdot \beta_\nu}{1 - \beta_\nu} \cdot \left(\varepsilon^{(\nu)'}\right)^{m_\nu + 1} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon^{(\nu)'}} < \varepsilon_\nu.$$

Mon théorème ***B*** a été exposé et démontré dans le Bulletin (Öfversigt) des travaux de l'Académie royale des sciences de Suède pour le 12 Avril 1882, ainsi que dans les Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 10 Avril et 14 Août 1882. J'ai toutefois considéré spécialement, dans ces deux publications, le cas mentionné auparavant, où le domaine $\mathfrak{A} + Q$ se compose de l'intérieur d'une ligne circulaire égale elle-même à Q', et ayant $x = 0$ pour centre. Les quantités b_ν ont aussi toutes été supposées égales à ∞. Si l'on désigne alors par R le rayon du cercle $\mathfrak{A} + Q$, toutes les quantités β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seront égales à $\frac{1}{R}$. On pourra choisir les quantités $\varepsilon^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de telle sorte que

$$\varepsilon^{(\nu)} = \left|\frac{a_\nu}{R}\right|.$$

La fonction $G(x)$ devient une série procédant suivant les puissances positives entières de x, et convergente du moins pour $|x| < R$. Si le domaine $\mathfrak{A} + Q$ se compose de la partie du domaine de la variable x, tombant en dehors d'une ligne circulaire elle-même égale à Q', ayant $x = 0$ pour centre et R pour rayon, toutes les quantités b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ peuvent être prises égales à zéro. Les quantités β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seront alors toutes égales à R. On peut prendre de même

$$\varepsilon^{(\nu)} = \left|\frac{R}{a_\nu}\right|.$$

La fonction $G(x)$ devient en ce cas une série procédant suivant les puissances positives entières de $\frac{1}{x}$, et convergente du moins pour $|x| > R$.

Soit maintenant $F(x)$ une fonction monogène uniforme donnée, pour laquelle l'ensemble P de tous ses points singuliers est tel que l'égalité $P - P' = Q = 0$ n'a pas lieu. En vertu du théorème $\boldsymbol{B}$ on peut toujours former une expression analytique, qui représente une fonction monogène uniforme, dont tous les points singuliers sont compris dans l'ensemble $Q + Q'$ et qui de plus est telle, que la différence entre elle et $F(x)$ est une nouvelle fonction monogène et uniforme, qui a les mêmes points réguliers que $F(x)$ mais qui en plus se comporte régulièrement aussi pour chaque point de l'ensemble $P - P' = Q$. On a par conséquent le théorème suivant.

$\boldsymbol{B}'$. Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme qui possède des points singuliers isolés. Il est toujours possible de former une expression analytique, représentant une autre fonction monogène uniforme telle, que la différence entre elle et $F(x)$ est une nouvelle fonction, qui se comporte régulièrement non seulement partout où c'est le cas pour la fonction proposée, mais aussi dans le voisinage de chaque point singulier isolé de cette dernière.

§ 2.

Pour pousser plus loin les recherches, exposées au § 1, il est nécessaire de commencer par développer quelques définitions et quelques théorèmes concernant les produits infinis.

On dit qu'un produit infini

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + v_\nu)$$

est convergent lorsque, après avoir fixé arbitrairement une quantité positive δ, il est toujours possible de trouver un nombre entier m tel, que le module de

$$\prod_{\nu=n}^{n+n'}(1 + v_\nu) - 1$$

pour chaque valeur positive de n', soit moindre que δ, aussitôt que $n \geqq m$.

Or, on peut démontrer que:

a »si $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + v_\nu)$ est un produit convergent, dans lequel chaque facteur est une quantité finie déterminée, différente de zéro, le produit $\prod_{\nu=1}^{n}(1 + v_\nu)$ tend vers une limite finie et déterminée lorsque n croît au delà de toute limite; autrement dit, il existe toujours une, et une seule, quantité finie et déterminée telle que, dans chaque voisinage de cette dernière, on trouve une infinité des valeurs que prend le produit $\prod_{\nu=1}^{n}(1 + v_\nu)$ pour les différentes valeurs de n.»

La définition suivante se trouve alors légitimée:

Un produit convergent $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + v_\nu)$ est accepté comme égal à la limite, vers laquelle converge le produit $\prod_{\nu=1}^{n}(1 + v_\nu)$ pour les valeurs croissantes de n.

Il est facile maintenant de démontrer les propositions suivantes:

b »un produit convergent ne peut être égal à zéro, à moins qu'un de ses facteurs ne soit égal à zéro;»

c »si $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + v_\nu)$ est un produit convergent, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu$$

où

$$w_1 = 1 + v_1$$

$$w_2 = (1 + v_1)v_2$$

$$w_3 = (1 + v_1)(1 + v_2)v_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$w_\nu = (1 + v_1)(1 + v_2)\ldots(1 + v_{\nu-1})v_\nu$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sera convergente aussi, et on aura de plus

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1 + v_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} w_\nu.»$$

On peut fixer les notions de la convergence *uniforme* et *absolue* des produits infinis tout à fait de la même manière qu'on le fait pour les séries infinies. (1) Pour le but que j'ai immédiatement en vue il suffit de bien formuler la définition de la convergence *uniforme*.

Un produit infini $\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$, *dont les facteurs sont des fonctions d'un nombre quelconque de variables, converge uniformément dans une certaine partie* $\mathfrak{A}$ *de son domaine de convergence si à chaque valeur positive* δ, *fixée arbitrairement, correspond toujours un nombre entier m tel, que le module de*

$$\prod_{\nu=n}^{n+n'} f_\nu - 1$$

est plus petit que δ, *pour tous les systèmes de valeurs des variables appartenant au domaine* $\mathfrak{A}$, *et pour chaque valeur positive de* n', *si tôt que* $n \geqq m$.

Or, on s'assure aisément que:

d »si le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ est uniformément convergent dans le domaine $\mathfrak{A}$, c'est aussi le cas pour la série

$$f_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (f_{\nu+1} - 1) \prod_{\mu=1}^{\nu} f_\mu$$

et l'on a de plus

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} f_\nu = f_1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (f_{\nu+1} - 1) \prod_{\mu=1}^{\nu} f_\mu.»$$

De là découle immédiatement le théorème important suivant: (2)

e »soient R et R' deux quantités positives données, telles que $R < R'$, et soient

$$P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x), \ldots$$

un nombre infini de séries, ordonnées suivant les puissances positives et négatives de x, lesquelles sont toutes convergentes, si tôt que

$$R < |x| < R'.$$

---

(1) K. Weierstrass: *Zur Functionenlehre*, p. 3 et 4.

(2) Voir Weierstrass: *Zur Functionenlehre*, p. 7.

Supposons de plus que

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}{}' P_\nu(x)$$

soit uniformément convergent pour toutes les valeurs de x qui non seulement satisfont à la condition

$$R < |x| < R',$$

mais ont en outre toutes le même module. On peut toujours trouver dans ce cas une série, ordonnée suivant les puissances positives et négatives de x, laquelle est convergente et égale à

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}{}' P_\nu(x)$$

pour toutes les valeurs de x remplissant la condition

$$R < |x| < R'.»$$

Ces quelques théorèmes empruntés à la théorie des produits infinis, que je viens d'exposer, suffisent pour le but que j'ai immédiatement en vue, et je puis maintenant passer à la démonstration d'un théorème nouveau, qui correspond complètement au théorème ***B*** du § précédent.

A. »Soit Q un ensemble isolé infini de points dans le domaine de la variable x, tel que l'ensemble $Q + Q'$ forme la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ les points différents de l'ensemble Q, et soit $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ une série de nombres entiers positifs ou négatifs. Il est toujours possible de former une expression analytique représentant une fonction monogène uniforme, laquelle se comporte régulièrement à l'intérieur du domaine $\mathfrak{A}$, n'y devient pas zéro et qui en outre dans le voisinage de chaque point a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) peut être mise sous la forme

$$(x - a_\nu)^{n_\nu} e^{\mathfrak{P}(x - a_\nu)}.$$

Chaque point de Q' est un point singulier essentiel de cette fonction.»

Pour démontrer ce théorème on peut procéder de la manière suivante. De même que dans le § 1 on peut adjoindre à chaque point a_ν, qui

n'est ni zéro ni infini, un nouveau point b_ν, placé en dehors ou sur la limite du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$; désignons par β_ν la limite inférieure de $|b_\nu - b|$ où b signifie l'un après l'autre tous les points de Q' et fixons, comme il est toujours possible de le faire, les quantités b_ν de manière que

$$\lim_{\nu=\infty} (|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0$$

et que la limite supérieure de β_ν soit une quantité finie. Choisissons de plus des quantités positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ et $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(\nu)}, \ldots$ de la même façon qu'au § 1, c'est à dire de manière que $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$ ait une valeur finie et que $\lim_{\nu=\infty} \varepsilon^{(\nu)} = 1$.

Supposons que a_ν ne soit ni 0 ni ∞.

Si b_ν n'est point ∞, on a

$$\frac{n_\nu}{x - a_\nu} = \frac{n_\nu}{x - b_\nu} + \frac{n_\nu}{x - b_\nu} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu$$

équation qui a lieu, si tôt que

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < 1.$$

Il en découle immédiatement

$$\left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^{n_\nu} = e^{-n_\nu \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu}$$

aussitôt que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < 1$. Cette équation a lieu même dans le cas où $b_\nu = \infty$, si par $\frac{a_\nu - \infty}{x - \infty}$ on entend l'expression $\frac{x}{a_\nu}$. On a en effet

$$\frac{n_\nu}{x - a_\nu} = -\frac{n_\nu}{a_\nu} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{a_\nu}} = -\frac{n_\nu}{a_\nu} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu$$

si tôt que $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1$ et par conséquent aussi:

$$\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} = e^{-n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}$$

si tôt que $\left|\frac{x}{a_\nu}\right| < 1$.

On voit par conséquent que

$$\left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu} = e^{-n_\nu \sum\limits_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu}$$

dès que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < 1$. Le nombre m_ν désigne ici un nombre entier positif ou nul. Si $m_\nu = 0$, on doit remplacer le facteur exponentiel

$$e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu}$$

par l'unité.

Adjoignons à chaque point a_ν, qui n'est égal ni à 0 ni à ∞, un nombre m_ν assez grand pour que

$$\left| n_\nu \sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu \right| < \varepsilon_\nu$$

si tôt que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| \leqq \varepsilon^{(\nu)}$ et posons

$$E_\nu(x) = \left(1 - \frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu}.$$

Dans le cas où a_ν est nul ou infini, j'entendrai par b_ν un point quelconque en dehors ou sur la limite du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$. Si $a_\nu = 0$, je poserai

$$E_\nu(x) = \left(1 + \frac{b_\nu}{x - b_\nu}\right)^{n_\nu}$$

où $E_\nu(x)$ pour $b_\nu = \infty$ désignera x^{n_ν}. Et enfin si $a_\nu = \infty$ je poserai de nouveau

$$E_\nu(x) = \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{b_\nu}}\right)^{n_\nu},$$

où $E_\nu(x)$ pour $b_\nu = 0$ désignera $\left(\frac{1}{x}\right)^{n_\nu}$.

Le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ représente une fonction $f(x)$ dont les propriétés sont déterminées par le théorème ***A***.

Soit en effet x_0 un point à l'intérieur de $\mathfrak{A}$. Il est toujours possible de fixer une quantité positive ρ telle, que toutes les valeurs de x pour lesquelles $|x - x_0| \leqq \rho$ appartiennent également à $\mathfrak{A}$. D'après le § 1 on peut aussi toujours trouver un nombre entier n assez grand pour que $\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon^{(\nu)}$, si tôt que $\nu \geqq n$ en même temps que $|x - x_0| \leqq \rho$.[1]

Si δ est une quantité positive arbitraire, pourvu que l'on choisisse n assez grand, on aura par conséquent, si $|x - x_0| \leqq \rho$

$$\left|\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right| < \varepsilon^{(\nu)}$$

$$\left| n_\nu \sum_{\mu = m_\nu + 1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu - b_\nu}{x - b_\nu}\right)^\mu \right| < \varepsilon_\nu$$

$$\sum_{k=\nu}^{\nu+\nu'} \left| n_k \sum_{\mu = m_k + 1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_k - b_k}{x - b_k}\right)^\mu \right| < \delta$$

si tôt que $\nu \geqq n$, ν' étant un nombre entier positif quelconque. Mais on a aussi

$$\prod_{k=\nu}^{\nu+\nu_1} E_k(x) = e^{-\sum\limits_{k=\nu}^{\nu+\nu'} n_k \cdot \sum\limits_{\mu=m_k+1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_k - b_k}{x - b_k}\right)^\mu}.$$

---

[1] Voir p. 26 et 27.

En augmentant le nombre n on peut par conséquent rendre le module de la différence entre $\prod_{\lambda=\nu}^{\nu+\nu'} E_\lambda(x)$ et l'unité plus petit, que chaque quantité positive voulue. Le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ est par conséquent uniformément convergent dans le domaine $|x - x_0| \leq \rho$ et l'on a, en vertu du théorème $\boldsymbol{c}$

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \mathfrak{P}(x - x_0)$$

égalité qui a lieu au moins dans le domaine $|x - x_0| \leq \rho$. Dans ce même domaine le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ ne peut jamais être égal à zéro, selon le théorème $\boldsymbol{b}$; on peut donc poser [1]

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = e^{\mathfrak{P}(x - x_0)}.$$

Si a_λ est un point qui appartient à l'ensemble Q, on peut toujours fixer une quantité ρ de telle manière que l'inégalité $|x - a_\lambda| \leq \rho$ n'ait lieu pour aucune valeur de x appartenant à l'ensemble Q, excepté pour $x = a_\lambda$. Il s'ensuit qu'on a

$$\frac{\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)}{E_\lambda(x)} = e^{\mathfrak{P}(x - a_\lambda)}$$

et par conséquent

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = (x - a_\lambda)^{n_\lambda} e^{\mathfrak{P}(x - a_\lambda)}$$

dans le voisinage immédiat de $x = a_\lambda$.

Le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ représente par conséquent à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$ une fonction monogène uniforme, qui s'y comporte partout régulièrement et dont la valeur y est toujours différente de zéro [2] et qui de plus, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_\nu$ de l'ensemble Q, peut être mise sous la forme $(x - a_\nu)^{n_\nu} e^{\mathfrak{P}(x - a_\nu)}$. Chaque point

---

(1) Voir WEIERSTRASS: *Zur Theorie* etc., p. 31.

(2) Voir page 21.

de Q' représente un point singulier essentiel de cette fonction, car dans chaque voisinage d'un point de Q' on trouve des pôles ou des points-zéros de la fonction. (¹)

La fonction considérée n'existe par conséquent nulle part *en dehors* du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$, mais à l'intérieur de ce *continuum* elle possède toutes les propriétés que j'ai indiquées dans mon théorème.

Les mêmes propriétés appartiennent aussi évidemment à la fonction représentée à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$ par

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . F_0(x)$$

si l'on désigne par $F_0(x)$ une fonction qui est monogène, uniforme et régulière à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$, et dont la valeur ne devient égale à zéro dans aucun point de ce domaine. D'un autre côté chaque fonction, jouissant des propriétés indiquées dans le théorème $\boldsymbol{A}$, peut être mise sous la forme:

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . F_0(x).$$

Dans le cas où le *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ constitue une surface simplement connexe, $F_0(x)$ peut toujours être mise sous la forme $e^{f_0(x)}$, en désignant par $f_0(x)$ une fonction monogène, uniforme et régulière à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$. (²)

Il convient de remarquer encore, que si l'on prend tous les points b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ sur la limite du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$, auquel cas il est aussi possible de remplacer par une seule valeur $\varepsilon < 1$ la série de valeurs $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(n)}, \ldots$; le produit $\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ se comportera régulièrement dans l'entourage de chaque point situé en dehors du *continuum* considéré.

(¹) Un point $x = a$ est un pôle ou un point-zéro d'une fonction monogène uniforme, si cette fonction peut être mise dans l'entourage du point $x = a$ sous la forme $(x - a)^n e^{\mathfrak{P}(x-a)}$, où n désigne un nombre entier positif ou négatif. Si n est positif $x = a$ est un point zéro, si n est négatif $x = a$ est un pôle ou autrement dit un point singulier non essentiel.

(²) Cf. Weierstrass: *Zur Theorie* etc., p. 31.

Le théorème A a été énoncé par M. Picard dans les Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 21 Mars 1881, pour le cas, où l'ensemble Q ne contient que des zéros de la fonction considérée et où le *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ est composé du domaine de la variable indépendante renfermé tout entier soit à l'intérieur d'un certain cercle ayant $x = 0$ pour centre, soit à l'extérieur de ce cercle. Il choisit toujours les points b_ν sur la périphérie de ce cercle, de manière que $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu - b_\nu| = 0$. Dans ce qui précède j'ai montré comment ces points b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ peuvent être choisis encore d'une infinité d'autres manières différentes. Si le domaine $\mathfrak{A} + Q$ est renfermé tout entier dans l'intérieur d'un certain cercle, qui est lui même égal à Q' et a $x = 0$ pour centre, on peut poser $b_\nu = \infty$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ et l'on obtient alors l'expression

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu} \right\}$$

qui représente une fonction n'existant qu'à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$.

Si d'un autre côté $\mathfrak{A} + Q$ constitue le domaine extérieur à un certain cercle, qui coïncide avec Q' et a $x = 0$ pour centre, on peut poser $b_\nu = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ et, dans ce cas, la fonction est représentée par l'expression

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{a_\nu}{x}\right)^{n_\nu} e^{n_\nu \sum\limits_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{a_\nu}{x}\right)^\mu} \right\}.$$

Dans le cas où Q' se compose du seul point $x = \infty$, le théorème A coïncide avec le théorème remarquable, dont le développement constitue la partie essentielle du mémoire de Weierstrass, que j'ai déjà cité à plusieurs reprises: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen einer Veränderlichen.*

La convergence du produit $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$ est telle, que les facteurs qui le composent peuvent être transposés d'une manière arbitraire, sans changer la valeur du produit. Si l'on désigne par conséquent par $\prod_{\nu'} E_{\nu}(x)$ le

produit de tous les facteurs, pour lesquels le nombre n_ν est un nombre entier positif, et par $\Pi_{\nu''} E_{\nu''}(x)$ celui de tous les facteurs, pour lesquels n_ν est un nombre entier négatif, on a

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \Pi_{\nu'} E_{\nu'}(x) . \Pi_{\nu''} E_{\nu''}(x).$$

Mais

$$\Pi_{\nu''} E_{\nu''}(x) = \frac{1}{\Pi_{\nu''} \overline{E}_{\nu''}(x)}$$

si l'on pose

$$\overline{E}_{\nu''}(x) = \frac{1}{E_{\nu''}(x)}$$

et l'on peut par conséquent écrire

$$(A_1) \qquad \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \frac{\Pi_{\nu'} E_{\nu'}(x)}{\Pi_{\nu''} \overline{E}_{\nu''}(x)}.$$

Chaque facteur $E_{\nu'}(x)$ est une fonction monogène uniforme qui n'a qu'un seul point zéro $x = a_{\nu'}$, et qu'un seul point singulier $x = b_{\nu'}$. Chaque facteur $\overline{E}_{\nu''}(x)$ est aussi une fonction monogène uniforme, qui n'a qu'un seul point zéro $x = a_{\nu''}$ et qu'un seul point singulier $x = b_{\nu''}$. Le produit $\Pi_{\nu'} E_{\nu'}(x)$ représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ une fonction monogène, uniforme et régulière qui n'a pas dans ce *continuum* d'autres points-zéros que les points $x = a_{\nu'}$, et qui dans l'entourage de chacun de ces points $x = a_{\lambda'}$ peut être mise sous la forme $(x - a_{\lambda'})^{n_{\lambda'}} e^{\mathfrak{P}(x - a_{\lambda'})}$. Le produit $\Pi_{\nu''} \overline{E}_{\nu''}(x)$ représente aussi à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui n'a pas dans ce *continuum* d'autres points-zéros que les points $x = a_{\nu''}$ et qui dans l'entourage de chacun de ces points $x = a_{\lambda''}$ est égale à $(x - a_{\lambda''})^{n_{\lambda''}} e^{\mathfrak{P}(x - a_{\lambda''})}$.

Je supposerai maintenant que tous les points b_ν ont été pris sur la limite du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ et je montrerai que les produits $\Pi_{\nu'} E_{\nu'}(x)$ et $\Pi_{\nu''} E_{\nu''}(x)$ peuvent être transformés dans ce cas en d'autres expressions analytiques.

En vertu de la relation $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu - b_\nu| = 0$, le produit de tous les facteurs $E_{\nu'}(x)$, pour lesquels le même point $x = b_\lambda$ a été adjoint à des points différents $x = a_{\nu'}$, constitue une fonction monogène, uniforme et

régulière qui n'a que le seul point singulier $x = b_\nu$ et pour laquelle ce point est un point singulier essentiel, si le nombre des facteurs est infini. Désignons cette fonction, qui est par conséquent une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x - b_\lambda}$ (1), par $G^{(\lambda)}\left(\frac{1}{x - b_\lambda}\right)$. Cette expression se réduit toujours à l'unité, si le point $x = b_\lambda$ ne se trouve pas parmi les points $x = b_\nu$, qui ont été adjoints aux points $x = a_{\nu'}$.

De la même manière, le produit de tous les facteurs $E_{\nu''}(x)$, pour lesquels le même point $x = b_\lambda$ a été adjoint à des points différents $x = a_{\nu''}$, constitue une fonction entière rationelle ou transcendante de $\frac{1}{x - b_\lambda}$, que je désignerai par $\overline{G}^{(\lambda)}\left(\frac{1}{x - b_\lambda}\right)$. Cette fonction est nécessairement transcendante si le nombre des facteurs $\overline{E}_{\nu''}(x)$ dont elle est composée, est infiniment grand. Elle se réduit à l'unité si le point $x = b_\lambda$ ne se trouve pas parmi les points $x = b_\nu$, qui ont été adjoints aux points $x = a_{\nu''}$. Il est à remarquer encore, que si l'ensemble Q' ne remplit pas la condition $Q' = Q''$, (2) l'une des deux fonctions $G^{(\lambda)}\left(\frac{1}{x - b_\lambda}\right)$, $\overline{G}^{(\lambda)}\left(\frac{1}{x - b_\lambda}\right)$ est nécessairement transcendante, si tôt que le point $x = b_\lambda$ appartient à l'ensemble $Q' - Q''$. Ceci est une conséquence immédiate de ce que, en vertu de la relation $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu - b_\nu| = 0$, chaque point de $Q' - Q''$ a été adjoint un nombre infini de fois à des points différents $x = a_\nu$.

En supposant par conséquent que tous les points $x = b_\nu$ ont été choisis sur la limite du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ on obtient l'égalité

$$(\mathrm{A}_2) \qquad \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x - b_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{G}^{(\nu)}\left(\frac{1}{x - b_\nu}\right)}$$

---

(1) Weierstrass: *Zur Theorie* etc., pag. 17, A.

(2) Si P est un ensemble de points quelconque, dans lequel chaque point particulier ne figure qu'une seule fois, on désigne par P'', d'après la notation de Cantor, un ensemble de points déduit de P' de la même manière que P' a été déduit de P. Il faut remarquer toutefois que, tandis qu'il n'est pas nécessaire que P contienne aucun point de P', P' au contraire contient nécessairement tous les points de P''. (Acta Mathematica, T. 2, p. 350.)

où les fonctions $G^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-b_\nu}\right)$ et $\overline{G}^{(\nu)}\left(\frac{1}{x-b_\nu}\right)$ ont les propriétés qui viennent d'être exposées dans ce qui précède. Si l'on suppose que Q' ne se compose que d'un nombre fini de points, la formule A_2 se transforme en une formule, qui se trouve dans le mémoire de WEIERSTRASS *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen* (¹) et de laquelle on peut dire, que, jointe au théorème cité page 10, elle constitue le résultat le plus général auquel l'étude des fonctions uniformes d'une variable a été amenée dans ce mémoire.

Le théorème A n'embrasse point le cas où Q est un ensemble fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

La fonction qui correspond à Q dans ce cas n'a pas de points singuliers essentiels, elle est toujours une fonction rationnelle de la variable indépendante x. (²)

Les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$ doivent par conséquent être choisis de manière que $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = 0$, mais pour le reste ils sont parfaitement arbitraires. Le théorème A peut être remplacé, dans le cas où Q est un ensemble fini de points, par le théorème élémentaire et bien connu suivant.

»Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$, p points différents dans le domaine de la variable x. Soient de plus $n_1, n_2, \ldots, n_p$, p nombres entiers positifs ou négatifs, assujettis à la condition $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = 0$. Désignons par C et par c deux quantités indépendantes de x, dont c est supposé différent de chacune des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Posons

$$E_\nu(x) = \left(1 - \frac{a_\nu - c}{x - c}\right)^{n_\nu}$$

où dans le cas $a_\nu = 0$ et $c = \infty$ l'expression $E_\nu(x)$ signifiera x^{n_ν},

dans le cas $a_\nu = \infty$ et $|c| > 0$ on entend par $E_\nu(x)$ l'expression $\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}\right)^{n_\nu}$

et dans le cas $a_\nu = \infty$ et $c = 0$ on entend par $E_\nu(x)$ l'expression $\left(\frac{1}{x}\right)^{n_\nu}$.

(¹) Page 18, formule 2.

(²) WEIERSTRASS: *Zur Theorie* etc., p. 12 et 13.

Le produit $C\prod_{\nu=1}^{p} E_\nu(x)$ représente une fonction rationnelle, dont les pôles et les zéros sont $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et qui dans l'entourage de chacun de ces points $x = a_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, p$) peut être égalée à $(x - a_\nu)^{n_\nu} e^{\mathfrak{P}(x-a_\nu)}$.

Chaque fonction rationnelle de la variable x peut aussi être mise sous la forme d'un produit pareil $C\prod_{\nu=1}^{p} E_\nu(x)$.»

Du théorème ***A*** découle comme corollaire immédiat un nouveau théorème, qui se rapporte à toutes les fonctions monogènes et uniformes qui possèdent des points-zéros et des pôles. Ce théorème correspond tout à fait au théorème ***B'*** du § 1.

A'. »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme de la variable x, possédant des zéros et des pôles. Il est toujours possible de former une expression analytique, qui représente une autre fonction monogène uniforme telle, que le quotient de $F(x)$ et de cette dernière fonction n'a ni points-zéros, ni pôles et de plus se comporte régulièrement dans l'entourage de chaque point régulier et de chaque point singulier non essentiel de $F(x)$.»

Ce théorème subsiste aussi dans le cas où $F(x)$ n'a qu'un nombre fini de zéros et de pôles $a_1, a_2, \ldots, a_p$. L'expression analytique en question peut être formée alors comme il a été indiqué à la page antérieure. Si $F(x)$ a des points singuliers essentiels, la relation $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = 0$ n'a pas nécessairement lieu. La constante c doit être choisie dans ce cas sur la limite ou en dehors du *continuum* composé par l'ensemble de tous les points réguliers de la fonction.

Le théorème ***A*** nous donne les moyens de généraliser dans diverses directions les théorèmes que j'ai déduits dans le paragraphe précédent.

Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme et soit $x = a$ ou un point régulier ou un point singulier isolé de cette fonction. Dans le voisinage immédiat de $x = a$, $F(x)$ peut toujours être mis sous la forme d'une série, procédant d'après les puissances positives et négatives de $x - a$. Cette série peut évidemment toujours être représentée comme la somme de deux autres:

$$(x - a)^n \mathfrak{G}\left(\frac{1}{x - a}\right) + (x - a)^n \mathfrak{P}(x - a)$$

où n désigne un nombre entier, positif, négatif ou nul, et $\mathfrak{G}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ une fonction entière de $\frac{1}{x-a}$ s'évanouissant pour $\frac{1}{x-a}=0$; le nombre n doit de plus être choisi de manière que $\mathfrak{G}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ ne soit pas identiquement nulle dans le cas où $n \leq 0$. Du reste n peut être fixé tout à fait arbitrairement, et à chaque n correspond une seule expression absolument déterminée

$$(x-a)^n \mathfrak{G}\left(\frac{1}{x-a}\right) + (x-a)^n \mathfrak{P}(x-a).$$

Je vais montrer dans ce qui suit, que le théorème $\boldsymbol{B}$ du § 1 peut être généralisé de telle manière, que l'on peut choisir arbitrairement les fonctions $(x-a)^n \mathfrak{G}\left(\frac{1}{x-a}\right)$, correspondant à chaque point a d'un ensemble de points isolé, et que l'on obtient toujours une fonction $F(x)$ correspondante. On retombe sur le théorème $\boldsymbol{B}$ du § 1 en supposant partout dans ce nouveau théorème $n=0$.

$\boldsymbol{B}$. »Soit Q un ensemble de points infini mais isolé appartenant au domaine de la variable x et choisi de manière que $Q+Q'$ forme la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ les différents points de l'ensemble Q, soit $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ une série de nombres entiers, positifs, négatifs ou nuls, et soit

$$\mathfrak{G}_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad \mathfrak{G}_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots, \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right), \ldots$$

une série de fonctions telles, que $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ est une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x-a_\nu}$, s'évanouissant pour $\frac{1}{x-a_\nu}=0$, mais n'étant pas identiquement nulle, si tôt que $n_\nu \leq 0$.

On peut toujours former une expression analytique, qui représente une fonction monogène, uniforme et régulière à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$, laquelle dans l'entourage de chacun des points a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ appartenant à l'ensemble Q, peut être mise sous la forme

$$(x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x-a_\nu).«$$

On peut en effet, d'après le théorème A, former un produit $\prod_{\nu=1}^{\prime} E_\nu(x)$, dans lequel le facteur $E_\nu(x)$ sera remplacé par l'unité toutes les fois que $n_\nu = 0$. Dans l'entourage de chaque point $x = a_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) l'égalité suivante a lieu:

$$\frac{(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)} = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x-a_\nu)$$

où $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ représente une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x-a_\nu}$, s'évanouissant pour $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$. Avec ces expressions $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ comme éléments, on peut former, d'après le théorème B du § 1, une expression $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$, dans laquelle, au cas où $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ se reduit identiquement à zéro, le terme correspondant $F_\nu(x)$ s'évanouit aussi identiquement; et cette expression représentera, au moins à l'intérieur du *continuum* limité par $Q + Q'$, une fonction monogène, uniforme et régulière, qui, dans l'entourage de chacun des points $x = a_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) pourra être mise sous la forme

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}(x-a_\nu).$$

Le produit

$$\prod_{\nu=1}^{\prime} E_\nu(x) . \sum_{\nu=1}^{\prime} F_\nu(x)$$

est en effet, comme on le voit clairement, une expression analytique de la même nature que celle que j'ai considérée dans mon théorème. La même chose a lieu pour le produit

$$\prod_{\nu=1}^{\prime} E_\nu(x) . \left\{ \sum_{\nu=1}^{\prime} F_\nu(x) + G(x) \right\}$$

dans laquelle $G(x)$ en dedans du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ est une fonction monogène, uniforme et régulière de la variable x.

Chaque fonction ayant les propriétés désignées, peut aussi être représentée sous cette dernière forme.

Si chaque point $x = a_\nu$, pour lequel l'élément $(x - a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ ne s'évanouit pas identiquement, est un point-zéro ou un point singulier de cet élément, la fonction correspondante a un point-zéro ou un point singulier dans chaque point de Q; chaque point de Q' est par conséquent un point singulier essentiel de la fonction considérée.

Le théorème $\boldsymbol{B}$, comme on s'en assure aisément, subsiste même dans le cas où l'ensemble de points Q est fini; mais dans ce cas on est assujetti à la restriction que les nombres entiers n_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ doivent être choisis de manière que leur somme soit égale à zéro.

Le théorème $\boldsymbol{B}$ nous donne les moyens nécessaires pour former, dans chaque cas où une certaine fonction monogène uniforme $F(x)$ est donnée, une expression analytique correspondante, qui représente une autre fonction monogène et uniforme, laquelle se comporte régulièrement partout où cela a lieu pour $F(x)$ et, pour un nombre infini de points isolés, peut représenter la fonction donnée avec chaque degré d'exactitude voulu.

Désignons en effet, de même que nous l'avons fait dans l'introduction à ce mémoire, par $\mathfrak{A}$ le *continuum* formé par l'ensemble de tous les points réguliers de la fonction $F(x)$. Ce *continuum* est limité par un ensemble de points P, qui embrasse l'ensemble dérivé P' et qui constitue l'ensemble de tous les points singuliers de $F(x)$. Si maintenant nous désignons par P_1 un ensemble de points qui embrasse l'ensemble dérivé P_1' et qui lui même est contenu dans P, on peut toujours, en vertu d'un théorème de Bendixson,[1] séparer du *continuum* $\mathfrak{A} + P - P'$ un ensemble de points isolés Q tel que $Q' = P_1$. Si l'on désigne par conséquent par $a_1, a_2, \ldots$ les différents points dont la totalité constitue Q, la fonction $F(x)$ pourra toujours être égalée, dans l'entourage de chacun de ces points $x = a_\nu$, à une expression de la forme

$$(x - a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right) + (x - a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x - a_\nu),$$

---

[1] *Un théorème auxiliaire de la théorie des ensembles.* (Bihang till Kongl. Svenska Vet. Ak. Handlingar, Tome 9 N° 7.)

où $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ a la même signification que dans le théorème ***B***, et où n_ν désigne un nombre entier positif, négatif ou nul, qui peut d'ailleurs être choisi arbitrairement, pourvu seulement que $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ ne se réduise pas identiquement à zéro, dans le cas où $n_\nu \leqq 0$.

Si l'on définit par conséquent un certain ensemble de points Q, comme il est toujours possible de le faire d'une infinité de manières différentes, et que l'on fixe les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots$, il est toujours possible, selon le théorème ***B***, de former une expression analytique $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ telle, que la différence

$$F(x) - \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$ une fonction monogène, uniforme et régulière et que dans l'entourage de chacun des points $x = a_\nu$, appartenant à Q, l'égalité

$$F(x) - \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) = (x - a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x - a_\nu)$$

ait lieu. Nous avons par conséquent le théorème suivant:

B'. »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme quelconque. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des points réguliers, et P l'ensemble des points singuliers de cette fonction. Soit de plus Q un ensemble de points isolés, appartenant au *continuum* $\mathfrak{A} + P - P'$ et tel, que l'ensemble dérivé Q' soit contenu dans l'ensemble P. On peut toujours former une expression analytique, qui représente à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ une fonction monogène, uniforme et régulière laquelle dans l'entourage de chacun des points de Q représente la fonction $F(x)$ avec chaque degré d'approximation voulu.»

Le théorème ***B'*** s'applique aussi au cas où l'ensemble Q n'est composé que d'un nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots$. Dans ce cas pourtant on est assujetti à la restriction suivante: si P est aussi un ensemble fini de points et si Q embrasse tous les points de P, les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_p$ doivent être choisis de manière que leur somme

$n_1 + n_2 + \ldots + n_p$ soit égale à zéro. Dans chaque autre cas ces nombres peuvent être pris arbitrairement, mais la constante c,[1] qui entre dans l'expression $\prod_{\nu=1}^{p} E_\nu(x)$, doit être choisie à la limite ou en dehors du *continuum* $\mathfrak{A}$.

Si la fonction $F(x)$ a des points singuliers isolés, si nous désignons par Q la totalite de ces points et si nous prenons de plus tous les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ égaux à zéro, le théorème $\boldsymbol{B}'$ se réduit au théorème $\boldsymbol{B}'$ du § 1.

Le théorème $\boldsymbol{B}$ nous apprend qu'il est toujours possible de former une expression analytique représentant une fonction, qui se comporte d'une certaine manière déterminée dans l'entourage de certains points désignés d'avance. Le théorème $\boldsymbol{B}'$ nous fait voir que chaque fonction monogène uniforme donnée peut toujours être représentée par une expression analytique semblable avec un degré d'approximation voulu.

Je vais montrer maintenant qu'il est toujours possible de choisir l'expression analytique en question de telle manière, que la fonction représentée par elle ait non seulement certains points-zéros prescrits d'avance, mais que sa valeur pour chaque autre point régulier soit différente de zéro.

Mais pour démontrer cette proposition, il est nécessaire d'établir le théorème suivant.

$\boldsymbol{f}$ »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme de x, pour toutes les valeurs de cette variable assujetties à la condition $|x - a| < r$, où a et r désignent deux quantités indépendantes de x, dont r est nécessairement réel et positif. Supposons de plus que pour toutes les valeurs considérées de x, à l'exception de $x = a$, $F(x)$ se comporte régulièrement et ait une valeur différente de zéro.

On peut alors toujours et d'une seule manière représenter $F(x)$ sous la forme

$$F(x) = C.(x-a)^m e^{G\left(\frac{1}{x-a}\right) + (x-a)\mathfrak{P}(x-a)}$$

où C est une constante, indépendante de x, m un nombre entier positif,

---

[1] Voir page 41.

négatif ou nul, et $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ une fonction entiere rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x-a}$, qui s'annule pour $\frac{1}{x-a} = 0$. La fonction $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ est toujours identiquement nulle pour chaque valeur de x, si $x = a$ est un point régulier ou bien un pôle de la fonction $F(x)$.»

Cette proposition peut être démontrée de la manière suivante.(1) La fonction $\frac{F'(x)}{F(x)}$ se comporte régulièrement, si tôt que $|x-a| < r$, sans que $x = a$. Si a est une quantité finie, on a par conséquent, en vertu du théorème de Laurent, si tôt que $|x-a| < r$

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{m}{x-a} + \frac{d}{dx} G\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{d}{dx}(x-a)\mathfrak{P}(x-a)$$

où m est une quantité indépendante de x et $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ a la même signification qu'auparavant.

Il s'ensuit que pour $|x-a| < r$

$$F(x) = C(x-a)^m e^{G\left(\frac{1}{x-a}\right) + (x-a)\mathfrak{P}(x-a)}$$

et cette dernière égalité montre que m doit être un nombre entier.

Si $a = \infty$, on a, si tôt que $\left|\frac{1}{x}\right| < r$,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{m'}{x} + \frac{d}{dx} G(x) + \frac{d}{dx}\frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$$

où m' est une quantité indépendante de x, et où $G\left(\frac{1}{x-\infty}\right) = G(x)$ a la même signification qu'auparavant. Il en résulte

$$F(x) = Cx^{m'} e^{G(x) + \frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

ou, en posant $m' = -m$,

$$F(x) = C\left(\frac{1}{x}\right)^m e^{G(x) + \frac{1}{x}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)}$$

(1) Cf. Weierstrass: *Zur Theorie* etc., pag. 48, 49.

si tôt que $\left|\frac{1}{x}\right| < r$. De cette égalité résulte évidemment que dans ce cas aussi m est un nombre entier.

Il est donc prouvé que quand $|x - a| < r$, l'égalité

$$F(x) = C(x-a)^m e^{G\left(\frac{1}{x-a}\right) + (x-a)\mathfrak{P}(x-a)}$$

a toujours lieu, aussi bien dans le cas où a est une quantité finie, que lorsque $a = \infty$. La fonction $F(x)$ ne peut être mise sous cette forme que d'une seule manière: en effet, il résulte d'une proposition démontrée dans les éléments de la théorie des fonctions, que l'égalité

$$1 = C(x-a)^m e^{G\left(\frac{1}{x-a}\right) + (x-a)\mathfrak{P}(x-a)}$$

ne peut avoir lieu autrement que si $C = 1$ et m, de même que tous les coefficients de $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ et de $\mathfrak{P}(x-a)$, sont égaux à zéro. Il suit aussi, comme conséquence de cette proposition, que $G\left(\frac{1}{x-a}\right)$ doit être identiquement nul, si $x = a$ est un point régulier ou un pôle, et de plus que $m = 0$ dans le cas où $x = a$ est un point régulier mais non un point-zéro.

La proposition auxiliaire que je viens d'établir sert à mieux comprendre le nouveau théorème suivant:

C. »Soit Q un ensemble infini de points isolés appartenant au domaine de la variable x et choisi de manière que $Q + Q'$ forme la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ la totalité des points de l'ensemble Q, soient $m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots$ et $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ deux séries de nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, et enfin

$$\mathfrak{G}_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad \mathfrak{G}_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots$$

une série de fonctions telles, que $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ est une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x-a_\nu}$ qui s'évanouit pour $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$, mais qui n'est pas identiquement nulle si $n_\nu \leq 0$.

On peut toujours former une expression analytique qui représente, à *l'intérieur* du *continuum* $\mathfrak{A}$, une fonction monogène, uniforme et régulière, conservant partout dans ce *continuum* une valeur différente de zéro et qui, dans le voisinage de chaque point a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) appartenant à l'ensemble Q, peut être égalée à

$$(x - a_\nu)^{m_\nu} \cdot e^{(x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x-a_\nu)}.»$$

On peut constituer cette expression analytique de la manière suivante. Formons d'après le théorème A un produit $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x)$, dans lequel $E_\nu(x)$ a la même signification que $E_\nu(x)$ dans ce théorème, sauf que m_ν est pris ici à la place de n_ν, et que ce nombre m_ν peut aussi être égal à zéro, auquel cas $E_\nu(x) = 1$. Pour chaque indice ν on a l'égalité

$$\frac{(x - a_\nu)^{m_\nu} e^{(x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)}}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x)} = e^{(x-a_\nu)^{n_\nu} \overline{\mathfrak{G}}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x-a_\nu)}$$

où $\overline{\mathfrak{G}}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ représente une fonction entière de $\frac{1}{x-a_\nu}$, qui s'évanouit pour $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$, mais qui n'est pas identiquement nulle, si $n_\nu \leqq 0$.

Servons-nous maintenant des fonctions $(x - a_\nu)^{n_\nu} \overline{\mathfrak{G}}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ pour en former, de la même manière qu'au théorème B, une expression analytique

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$$

qui partout à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$ se comporte régulièrement et qui, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_\nu$, peut être égalée à

$$(x - a_\nu)^{n_\nu} \overline{\mathfrak{G}}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x - a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x - a_\nu).$$

On a alors dans

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x) . e^{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)}$$

une expression qui représente à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ une fonction avec les propriétés indiquées.

Une fonction semblable est représentée aussi par

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x) . e^{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)} . F_0(x)$$

si $F_0(x)$ à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$ est une fonction monogène, uniforme et régulière qui ne s'annule jamais et qui de plus dans le voisinage de chaque point $x = a_\nu$ peut se mettre sous la forme

$$e^{(x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x-a_\nu)} .$$

Toute fonction $F(x)$ qui possède les propriétés indiquées dans ce théorème, peut évidemment aussi être représentée sous la forme générale ci-dessus.

Si les nombres entiers n_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) sont tous positifs et que le *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ forme une surface simplement connexe, on peut toujours choisir les expressions $F_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), de manière que la fonction considérée soit représentée par

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x) . e^{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \left[\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) + f_0(x)\right]} ,$$

où la fonction $f_0(x)$ est monogène, uniforme et régulière à l'intérieur de $\mathfrak{A} + Q$.

En choisissant d'abord d'une manière déterminée le terme constant dans chacune des expressions $(x - a_\nu)\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$, on obtient

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x) . e^{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F'_\nu(x)} . F_0(x).$$

On a ici

$$F_0(x) = e^{\bar{f}_0(x)}$$

où $\bar{f}_0(x)$ est une fonction monogène, uniforme et régulière à l'intérieur

du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$. Dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_\nu$ on a

$$\overline{f}_0(x) = (x - a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x - a_\nu) + 2k_\nu \pi i$$

où k_ν représente un nombre entier positif ou négatif ou bien zéro. On peut fixer le nombre k_ν d'une manière arbitraire pour un certain point $a_{\nu'}$; mais alors, en vertu du célèbre théorème de Cauchy sur le nombre des racines[1] et en conséquence de ce que le *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ forme une surface simplement connexe, ce nombre est nécessairement déterminé à sens unique pour chaque indice $\nu \gtrless \nu'$. D'après le théorème ***A*** on a par conséquent

$$\overline{f}_0(x) = \prod_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) . \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu''(x) + f_0(x) \right]$$

où $f_0(x)$ a la même signification qu'auparavant.

En posant alors

$$F_\nu(x) = F_\nu'(x) + F_\nu''(x)$$

on obtient l'expression cherchée de la fonction considérée. Je l'ai communiquée dans le Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, série II, tome III, page 272.

Le théorème ***C*** subsiste même dans le cas où Q est un ensemble fini de points $a_1, a_2, \dots, a_p$. Mais alors, comme on le voit facilement, la restriction suivante doit avoir lieu: les nombres entiers $m_1, m_2, \dots, m_p$ doivent être assujettis à la condition $m_1 + m_2 + \dots + m_p = 0$. Les nombres entiers $n_1, n_2, \dots, n_p$ doivent être également choisis de manière que $n_1 + n_2 + \dots + n_p = 0$. Si les nombres m_ν et n_ν $(\nu = 1, 2, \dots, p)$ remplissent ces conditions, les produits $\prod_{\nu=1}^{p} E_\nu(x)$ et $\prod_{\nu=1}^{p} E_\nu(x)$ peuvent être formés d'après le théorème cité page 41.

Si tous les nombres entiers n_ν $(\nu = 1, 2, \dots)$ sont positifs et que de plus toutes les fonctions correspondantes $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ soient choisies de sorte qu'aucune d'elles ne contienne de puissance de $\frac{1}{x - a_\nu}$ supérieure

[1] Cf. G. Mittag-Leffler: *Om skiljandet af rötterna till en synektisk funktion af en variabel.* Upsala Universitets Årsskrift, 1872.

à $\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)^{n_\nu}$, l'expression analytique formée suivant la manière indiquée représentera à l'intérieur de $\mathfrak{A}+Q$ une fonction monogène uniforme, qui dans ce domaine n'a pas de points singuliers essentiels et dont tous les pôles et tous les zéros sont contenus dans Q. Dans ce cas, on a dans le voisinage de chaque point $(x=a_\nu)$ de Q

$$(x-a_\nu)^{m_\nu} e^{(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)+(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)}$$

$$=(x-a_\nu)^{m_\nu}[g_\nu(x-a_\nu)+(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)]$$

où $g_\nu(x-a_\nu)$ est une fonction entière rationnelle de $(x-a_\nu)$ de degré $n_\nu - 1$, qui ne s'annule pas pour $x-a_\nu=0$. Les coefficients de $g_\nu(x-a_\nu)$ sont des fonctions rationnelles entières de ceux de $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$. D'un autre côté, les coefficients de $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ sont aussi déterminés à sens unique par ceux de $g_\nu(x-a_\nu)$, si seulement, comme il est toujours possible de le faire, le coefficient de $\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)^{n_\nu}$ dans $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ est choisi de façon que l'égalité

$$e^{(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)+(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)}=g_\nu(x-a_\nu)+(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)$$

ait lieu pour $x=a_\nu$.

Si l'on exige, par conséquent, que la fonction représentée par l'expression cherchée se mette dans le voisinage de chaque point $x=a_\nu$ sous la forme

$$(x-a_\nu)^{m_\nu} g_\nu(x-a_\nu)+(x-a_\nu)^{m_\nu+n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)$$

où les fonctions $g_\nu(x-a_\nu)$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ sont choisies arbitrairement, il ne reste plus qu'à déterminer par le calcul les fonctions correspondantes $(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ et à former une expression analytique analogue à celle du théorème ***C***.

Du théorème ***C*** découle immédiatement, par conséquent, le théorème nouveau qui suit:

D. »Soit Q un ensemble infini de points isolés dans le domaine de

la variable x, choisi de manière que $Q + Q'$ forme la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$. Soit $a_1, a_2, \ldots$ la totalité des points de l'ensemble Q, soit $m_1, m_2, \ldots$ une série de nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, et soit $n_1, n_2, \ldots$ une série de nombres exclusivement positifs. Soit de plus

$$g_1(x - a_1), \quad g_2(x - a_2), \ldots, g_\nu(x - a_\nu), \ldots$$

une série de fonctions entières telles, que $g_\nu(x - a_\nu)$ est une fonction entière rationnelle de $(x - a_\nu)$ du degré $n_\nu - 1$, qui ne s'évanouit pas pour $x - a_\nu = 0$.

Il est toujours possible de former une expression analytique représentant à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ une fonction monogène uniforme, qui, à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, se comporte partout régulièrement et a une valeur différente de zéro, et qui, dans le voisinage de chaque point $x = a_\nu$ appartenant à Q, peut se mettre sous la forme

$$(x - a_\nu)^{m_\nu} g_\nu(x - a_\nu) + (x - a_\nu)^{m_\nu + n_\nu} \mathfrak{P}(x - a_\nu).»$$

En supposant que l'expression $(x - a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ dans le théorème $\boldsymbol{B}$ ait la forme $(x - a_\nu)^{m_\nu} g_\nu(x - a_\nu)$, on obtient aussi une expression analytique représentant à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + Q$ une fonction monogène uniforme, qui se comporte régulièrement partout à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ et qui dans le voisinage de chaque point $x = a_\nu$ de Q peut être égalée à

$$(x - a_\nu)^{m_\nu} g_\nu(x - a_\nu) + (x - a_\nu)^{m_\nu + n_\nu} \mathfrak{P}(x - a_\nu).$$

Mais cette dernière fonction se distingue pourtant de celle qui est formée d'après le théorème $\boldsymbol{D}$, en ce qu'elle peut avoir des zéros à l'intérieur de $\mathfrak{A}$, ce qui n'est jamais le cas pour l'autre.

Le théorème $\boldsymbol{D}$ contient une généralisation du théorème $\boldsymbol{A}$ qui mérite d'être remarquée. D'après le théorème $\boldsymbol{A}$, on peut former une expression analytique, représentant une fonction qui a certains zéros et certains pôles prescrits d'avance, de manière que l'ordre de chacun d'eux est fixé à volonté. Le théorème $\boldsymbol{D}$ nous permet de former une expression représentant une fonction qui non seulement possède la propriété exigée, mais satisfait de plus à la condition suivante: dans son développement en série de puissances, dans l'entourage de chacun des pôles et des zéros ainsi que d'un nombre infini d'autres points, un nombre voulu de coefficients obtiennent certaines valeurs fixées arbitrairement d'avance.

Le théorème $\boldsymbol{D}$ a déjà été énoncé par moi dans le Bulletin etc. (loc. cit.). Mais là j'ai supposé que Q' ne consiste qu'en un seul point $x = \infty$.[1]

Soit maintenant $F(x)$ une fonction monogène uniforme quelconque, et désignons comme précédemment par $\mathfrak{A}$ l'ensemble de tous ses points réguliers et par P celui de tous ses points singuliers. Soit de plus $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous les points réguliers où cette fonction a une valeur différente de zéro, et $\mathfrak{P}$ celui des points-zéros et des points singuliers. On voit immédiatement que $\mathfrak{A}$ contient $\mathfrak{B}$ et que $\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}'$ contient $\mathfrak{A}$.

D'après le théorème $\boldsymbol{C}$, on peut former pour chaque fonction donnée $F(x)$ une expression analytique correspondante, qui représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{B}$ une nouvelle fonction monogène telle, que non seulement pour un nombre infini de points déterminés d'avance, cette dernière coïncide avec la fonction donnée suivant un degré d'approximation voulu, mais encore qu'elle se comporte régulièrement partout à l'intérieur de $\mathfrak{B}$ et n'y devienne jamais égale à zéro.

Soit en effet Q un ensemble infini de points isolés séparé du *continuum* $\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}'$ de sorte que Q' soit contenu dans $\mathfrak{P}$. Si nous désignons par $a_1, a_2, \ldots$ les différents points de Q, nous aurons pour l'entourage immédiat de chacun de ces points

$$F(x) = (x - a_\nu)^{m_\nu} e^{(x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + (x-a_\nu)^{n_\nu} \mathfrak{P}(x-a_\nu)}$$

où $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ a la même signification qu'au théorème $\boldsymbol{C}$, m_ν est un certain nombre entier positif, négatif ou nul, et n_ν en est un autre nombre qu'on peut du reste choisir arbitrairement, pourvu que la fonction $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ ne soit pas identiquement nulle si $n_\nu \leqq 0$. Fixant avec les restrictions indiquées l'ensemble de points Q et les nombres $n_1, n_2, \ldots$, nous pouvons toujours former, d'après le théorème $\boldsymbol{C}$, une expression analytique

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x) e^{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x) \cdot \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)}$$

---

[1] Voir de plus E. Schering: *Das Anschliessen* etc., p. 4.

représentant à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{B}$ une fonction monogène uniforme, qui se comporte partout régulièrement et ne s'annule jamais et qui de plus est telle, que si nous la divisons par $F(x)$, le quotient peut, dans l'entourage de chaque point $x = a_\nu$ appartenant à Q, être égalé à

$$e^{(x-a_\nu)^{n_\nu}\mathfrak{P}(x-a_\nu)}.$$

J'ai obtenu par conséquent le théorème suivant:

C'. »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme quelconque. Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous ses points réguliers qui ne sont pas des points-zéros, et $\mathfrak{P}$ celui de tous les points-zéros et des points singuliers.

Soit de plus Q un ensemble infini de points isolés, contenu dans $\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}'$ et tel, que Q' est contenu dans $\mathfrak{P}$. On peut toujours former une expression analytique, représentant à l'intérieur de $\mathfrak{B}$ une fonction monogène uniforme, qui se comporte partout régulièrement et a une valeur différente de zéro et qui, de plus, dans l'entourage de chaque point de Q, coïncide avec la fonction $F(x)$ suivant un degré d'approximation voulu.»

Si $\mathfrak{P}$ est un ensemble fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_p$, les nombres entiers correspondants $m_1, m_2, \ldots, m_p$ doivent nécessairement remplir la condition

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = 0.$$

Si Q est aussi un ensemble fini de points qui embrasse $\mathfrak{P}$, le théorème en question n'aura lieu qu'à la condition que les nombres entiers $n_1, n_2, \ldots$ soient choisis de manière que leur somme soit nulle. Dans tout autre cas, le théorème ***C*** subsiste sans aucune restriction par rapport au choix des nombres entiers n_ν, même si Q est un ensemble fini de points. Dans ce dernier cas pourtant, les constantes (¹) qui entrent dans les produits $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \overline{E}_\nu(x)$ et $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu(x)$, doivent être choisies sur la limite ou en dehors du *continuum* $\mathfrak{B}$.

Les théorèmes que j'ai démontrés dans ce paragraphe sont les mêmes que ceux que j'ai annoncés à la fin de ma communication dans les Comptes Rendus etc. pour le 14 Août 1882.

(¹) Voir page 41.

§ 3.

Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme quelconque, $\mathfrak{A}$ le *continuum* formé par l'ensemble des points réguliers de cette fonction, et P l'ensemble de ses points singuliers. Si l'égalité $P - P' = 0$ n'a pas lieu et que par suite la fonction en question possède des points singuliers isolés, on obtiendra d'après le théorème $\boldsymbol{B'}$ du § 1 ou d'après le théorème $\boldsymbol{B'}$ du § 2, une expression représentant une fonction telle, que la différence entre elle et $F(x)$ constitue une nouvelle fonction monogène uniforme, qui se comporte régulièrement non seulement à l'intérieur de $\mathfrak{A}$ mais de même dans chaque point de $P - P'$. On pourrait procéder avec cette nouvelle fonction comme avec $F(x)$ et ainsi de suite. On obtiendrait ainsi, après chaque opération, une expression nouvelle, qui, additionnée à la somme de toutes les précédentes, représenterait une fonction telle que la différence entre elle et $F(x)$ serait une nouvelle fonction dépourvue d'un nombre de plus en plus grand des singularités appartenant à $F(x)$. Mais ici l'on se demande si ce procédé est illimité ou a une limite déterminée et s'il nous conduit finalement à une fonction telle, que la différence entre elle et $F(x)$ soit une nouvelle fonction, tellement plus simple que $F(x)$, qu'elle puisse être considérée comme une fonction d'une nature essentiellement différente et plus élémentaire? La même question se pose pour le procédé indiqué dans le théorème $\boldsymbol{C'}$. Ce n'est que tout récemment, et grâce aux recherches remarquables de Cantor, qu'il a été possible de répondre à ces questions par l'affirmative.

Le procédé indiqué a réellement dans chaque cas une limite déterminée; il aboutit toujours à une fonction jouant précisément le même rôle que la constante additive ou multiplicative, à laquelle on est amené lorsqu'on veut représenter une fonction rationnelle sous forme d'une somme de fractions partielles ou sous forme d'un produit.

Mais pour démontrer cette proposition, il faut rappeler certains résultats auxquels est arrivé Cantor. Je les signalerai ici de manière qu'on

puisse suivre mon exposition, même sans avoir étudié les mémoires de Cantor.

Soit P un ensemble infini de points quelconque, ne contenant chaque point particulier qu'une seule fois, et comme auparavant, P' l'ensemble de tous les points tels, que dans chaque entourage de chacun d'eux se trouvent une infinité de points appartenant à P. Cantor désigne [1] de même par $P^{(2)}$ l'ensemble de tous les points tels, que dans l'entourage de chacun de ces derniers il y a une infinité de points de P', et par $P^{(\nu+1)}$ l'ensemble de tous les points tels, que dans l'entourage de chacun d'eux se trouvent une infinité de points appartenant à $P^{(\nu)}$.

Dans la série $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu)}, \ldots$ chaque ensemble qui précède contient tous les points des ensembles suivants. Il peut arriver qu'en procédant de gauche à droite dans cette série, on arrive à un ensemble $P^{(n)}$ *ne contenant qu'un nombre fini de points.* [2] Dans ce cas l'ensemble $P^{(n+1)}$ ne contient pas de points du tout, ce que l'on exprime par l'égalité $P^{(n+1)} = 0$. Il peut aussi arriver qu'en procédant dans la suite $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu)}, \ldots$ on n'arrive jamais à un ensemble $P^{(n)}$ tel que $P^{(n+1)} = 0$. Dans ce cas, il existe toujours un ensemble, commun à toute la série

$$P^{(1)},\ P^{(2)}, \ldots, P^{(\nu)}, \ldots$$

et Cantor le désigne par $P^{(\omega)}$. [3]

---

[1] Cf. page 40.

[2] Comme exemple, on peut citer l'ensemble des nombres, qu'on obtient de l'expression

$$\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n}}$$

en faisant parcourir à chacune des quantités $m_1, m_2, \ldots, m_n$ toute la série des nombres entiers positifs. L'ensemble considéré est un ensemble isolé et, si on le désigne par P, $P^{(n)}$ ne contiendra que le seul point *zéro*.

[3] Comme exemple d'un ensemble de points P, pour lequel il n'existe pas de nombre entier positif n, tel que $P^{(n+1)} = 0$, on peut citer l'ensemble de tous les nombres, que l'on obtient de l'expression

$$\frac{1}{2^{n}} + \frac{1}{2^{n+m_1}} + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n}}$$

Il désigne ensuite par $P^{(\omega+1)}$ l'ensemble de tous les points tels, que dans l'entourage de chacun d'eux se trouvent une infinité de points appartenant à $P^{(\omega)}$, et par $P^{(\omega+\nu+1)}$ l'ensemble de tous les points tels, que dans l'entourage de chacun d'eux se trouvent une infinité de points appartenant à $P^{(\omega+\nu)}$. Il peut arriver qu'en parcourant la série

$$P^{(\omega)},\ P^{(\omega+1)}, \ldots, P^{(\omega+\nu)}, \ldots$$

on arrive enfin à un ensemble $P^{(\omega+n)}$ ne consistant qu'en un nombre fini de points de manière que $P^{(\omega+n+1)} = 0$. [1]

Mais il se peut tout aussi bien que l'on ne parvienne jamais à un ensemble $P^{(\omega+n+1)} = 0$. Dans ce dernier cas, on désigne par $P^{(2\omega)}$ l'ensemble commun à tous les ensembles $P^{(\omega)}$, $P^{(\omega+1)}, \ldots, P^{(\omega+\nu)}, \ldots$. [2]

---

en faisant parcourir à chacune des quantités n, m_1, $m_2, \ldots, m_n$ toute la série des nombres entiers positifs. Dans ce cas $P^{(\omega)}$ ne contient que le seul point zéro. L'ensemble considéré P est un ensemble de points isolés.

[1] Comme exemple d'un ensemble de points P, pour lequel $P^{(\omega+n)}$ contient un nombre fini de points, on peut citer celui qu'on obtient de l'expression

$$\frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n+p}} + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1}}$$

$$+ \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1+q_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1+q_2+\ldots+q_p}}$$

en y faisant parcourir à chacune des quantités m_1, $m_2, \ldots, m_n$, p, q_1, $q_2, \ldots, q_p$ toute la série des nombres entiers positifs. L'ensemble considéré est un ensemble isolé et $P^{(\omega+n)}$ ne contient que le seul point zéro.

[2] Soit P l'ensemble de tous les nombres, que l'on obtient de l'expression

$$\frac{1}{2^{n}} + \frac{1}{2^{n+m_1}} + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n}} + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n+p}}$$

$$+ \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1}} + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1+q_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+m_1+m_2+\ldots+m_n+p+q_1+q_2+\ldots+q_p}}$$

en faisant parcourir à toutes les quantités n, m_1, $m_2, \ldots, m_n$, p, q_1, $q_2, \ldots, q_p$ toute la série des nombres entiers positifs. Il n'existe pas dans ce cas de nombre entier ν tel, que $P^{(\omega+\nu)} = 0$. L'ensemble considéré est un ensemble de points isolé et $P^{(2\omega)}$ ne contient que le seul point *zéro*.

En continuant de procéder ainsi, on arrive à un ensemble de points $P^{(\nu\omega+\nu')}$, où ν et ν' désignent des nombres entiers positifs. On désigne ensuite par $P^{(\omega^2)}$ l'ensemble des points communs à tous les ensembles $P^{(\omega)}, P^{(2\omega)}, \dots, P^{(\nu\omega)}, \dots$ et l'on obtient alors l'ensemble $P^{(\nu\omega^2+\nu'\omega+\nu'')}$ où ν, ν', ν'' désignent des nombres entiers positifs. En poursuivant le même procédé, on parvient à l'ensemble de points

$$P^{(\nu\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\dots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu)}$$

puis à

$$P^{(\omega^\omega)}, \quad P^{(\omega^\omega+1)}, \dots, (P^{\omega^\omega+\mu}), \quad P^{(\omega^{\omega^\omega})} \text{ etc.} \text{ (}^1\text{)}$$

Tous les symboles $\omega,\ \omega+1, \dots, 2\omega, \dots, \nu\omega, \dots, \omega^2,\ \omega^2+1, \dots, \nu\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\dots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \alpha, \dots$ sont appelés par Cantor des nombres de *la seconde classe*, ([2]) tandis que les nombres entiers positifs $1, 2, \dots, \nu, \dots$ constituent ceux de la *première classe*. Il existe pour les nombres de la seconde classe, de même que pour ceux de la première, un ordre déterminé d'après lequel ils sont rangés, de sorte que si l'on prend un nombre quelconque, il existe toujours un autre nombre, et un seul, qui suit immédiatement après lui. Mais le contraire n'a évidemment pas toujours lieu et l'on ne peut pas dire qu'à chaque nombre donné corresponde toujours un autre nombre, qui le *précède immédiatement.* ([3])

En parcourant la série $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(\alpha)}, \dots$ où α désigne un nombre quelconque de la première ou de la seconde classe il se peut qu'on parvienne à un nombre $\bar{\alpha}$ tel, que $P^{(\bar{\alpha})}$ ne contienne qu'un nombre fini de points, et que par conséquent $P^{(\bar{\alpha}+1)} = 0$. Dans ce cas l'ensemble $P^{(\alpha)}$, où α est un des nombres qui précèdent $\bar{\alpha}$, a la même puissance que la série des nombres $1, 2, \dots, \nu, \dots$ c'est-à-dire *la première puissance.* ([4])

([1]) Voir ce journal, T. 2, p. 359—60.

([2]) Voir ce journal, T. 2, p. 385.

([3]) Pour les nombres 2ω, ω^ω, etc., par exemple, il n'existe pas de nombre qui les précède immédiatement.

([4]) Voir ce journal, T. 2, p. 409, Théorème B.

La réciproque se présente également: si P' est un ensemble de points de la première puissance, il existe toujours un nombre de la première ou de la seconde classe $\bar{\alpha}$, tel que $P^{(\bar{\alpha})}$ ne contient qu'un nombre fini de points.[1]

Mais il peut aussi arriver qu'en procédant dans la série

$$P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(\alpha)}, \ldots$$

on n'arrive jamais à un ensemble ne contenant qu'un nombre fini de points. Dans ce cas on peut énoncer le théorème suivant, qui a été démontré par un de mes élèves, M. I. Bendixson [2], et qui embrasse comme cas spécial le théorème précité de Cantor: »Si P est un ensemble de points quelconque, il existe toujours un premier nombre γ appartenant à la première ou à la seconde classe, pour lequel $P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$. L'ensemble $P' - P^{(\gamma)}$ a la première puissance.»

Considérons maintenant un *continuum*, dont la limite complète est constituée par l'ensemble de points $S = S'$. D'après un autre théorème de Bendixson cité au page 45 il est toujours possible pour chaque nombre donné de la première ou de la seconde classe γ de séparer d'une infinité de manières différentes de ce *continuum* un ensemble de points tel, que, ajouté à l'ensemble S, il forme un ensemble de points P, contenant l'ensemble $P^{(1)}$ et ayant la propriété $P^{(\gamma)} = S$; on aura par conséquent $P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$, et on peut toujours choisir l'ensemble $P - P^{(\gamma)}$ de façon que le nombre donné γ soit le premier nombre de la première ou de la seconde classe, pour lequel cette égalité ait lieu.

---

[1] Voir ce journal, T. 2, p. 409, Théorème C. A proprement parler, le théorème C de Cantor énonce seulement qu'il existe toujours un premier nombre γ, qui appartient à la première ou à la seconde classe et pour lequel $P^{(\gamma)} = 0$. Mais en se servant des mêmes raisonnements que Bendixson (voir ce journal, T. 2, p. 419—421), on montre facilement que γ doit toujours avoir la forme $\bar{\alpha} + 1$ et que par conséquent $P^{(\bar{\alpha})}$ ne contient qu'un nombre fini de points.

[2] Voir ce journal, T. 2, p. 426. Voir aussi à ce sujet Cantor, *Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten.* N° 6. Mathematische Annalen, Bd. 23, p. 467—469.

Il est aisé maintenant de démontrer que, après avoir retranché du *continuum* donné l'ensemble de points $P - P^{(\gamma)}$, le domaine qui reste est toujours un *continuum* $\mathfrak{A}$, composé d'une seule pièce et complètement limité par l'ensemble de points P. Cantor a démontré, en effet, que si l'on retranche du *continuum* donné un ensemble de points P_1 quelconque, de la première puissance, il est toujours possible d'unir deux points appartenant à ce *continuum* mais non à P_1, par une ligne continue, dont tout le parcours appartient au *continuum* considéré et qui ne passe par aucun des points de P_1.[1] Mais si P a une signification telle que dans le cas présent et que $P_1 = P - P^{(\gamma)}$, chaque point de P'_1 appartient nécessairement à P', et par conséquent aussi à P, c'est-à-dire ou bien à P_1 ou bien à $P^{(\gamma)}$. Mais $P^{(\gamma)}$ constituant la limite du premier *continuum* considéré la limite inférieure de la distance d'un point de la ligne donnée à un point de P est par conséquent une quantité positive, et les deux points extrêmes de la ligne sont toujours unis par un *continuum*, appartenant au *continuum* considéré. Et la proposition que j'ai énoncée se trouve démontrée par là. On voit de même que si α est un nombre quelconque de la première ou de la seconde classe, qui précède γ, $\mathfrak{A} + P - P^{(\alpha)}$ est un nouveau *continuum* composé d'une seule pièce et limité complètement par l'ensemble de points $P^{(\alpha)}$.

Je me suis déjà servi de ce théorème, dans le cas le plus simple où $\alpha = 1$.

Ces considérations préliminaires une fois établies, il me sera facile de terminer mes recherches de la façon indiquée au commencement de ce paragraphe.

Soit $\mathfrak{C}$ un *continuum*, dont la limite complète est formée par un ensemble de points que je désignerai par R, et qui est tel que l'égalité $R - R' = 0$ n'ait pas lieu; et soit γ le premier nombre de la première ou de la seconde classe, pour lequel $R^{(\gamma)} = R^{(\gamma+1)}$. Soient de plus $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ les différents points dont la totalité forme l'ensemble $R - R^{(\gamma)}$. Désignons encore par a_{ν_α} les points a_ν appartenant à l'ensemble $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ où α est un nombre qui précède γ. Le nombre α peut aussi être égal à zéro, dans quel cas a_{ν_0} désigne les points différents qui composent l'ensemble $R - R^{(1)}$. Je remarquerai ici en passant

[1] Voir ce journal, T. 2, p. 369.

que $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ ne peut évidemment être composé d'un nombre fini de points que dans le cas où $R^{(\alpha+1)} = R^{(\gamma)}$. Si $R^{(\gamma)} = 0$, il existe toujours un nombre $\bar{\alpha}$ tel que $\gamma = \bar{\alpha} + 1$. Dans ce cas, $R^{(\bar{\alpha})} - R^{(\bar{\alpha}+1)}$ ne contient de même qu'un nombre fini de points. A chaque point a_{ν_α}, qui n'est ni zéro, ni infini et qui n'appartient pas à un ensemble fini de points $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$, on peut toujours faire correspondre de la manière suivante un autre point b_{ν_α}, situé sur la limite ou en dehors du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha+1)}$. Désignons par β_{ν_α} la limite inférieure de $|b - b_{\nu_\alpha}|$, lorsque b parcourt les uns après les autres tous les points de l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$ et choisissons b_{ν_α} de manière que: 1° la limite supérieure de β_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) soit une quantité finie; et que 2° l'égalité

$$\lim_{\nu = \infty} (|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0$$

ait lieu; c'est-à-dire qu'à chaque quantité positive donnée θ corresponde un nombre entier positif n, tel que

$$|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu < \theta$$

dès que $\nu \geqq n$.

On peut toujours choisir les quantités b_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) dans l'ensemble R' de manière que la condition soit satisfaite. Toutes les quantités β_ν sont en effet égales à *zéro* dans ce cas, et l'on n'a qu'à choisir entre les points de l'ensemble R', des points b_ν tels, que b_{ν_α} appartienne à l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$ et que

$$\lim_{\nu = \infty} |a_\nu - b_\nu| = 0$$

c'est-à-dire, qu'à chaque quantité positive θ corresponde un nombre entier positif n tel que $|a_\nu - b_\nu| < \theta$, dès que $\nu \geqq n$. Cela aura lieu par exemple, si l'on choisit b_{ν_α} de manière que $|a_{\nu_\alpha} - b_{\nu_\alpha}|$ soit égal à la limite inférieure des différentes valeurs que prend $|a_{\nu_\alpha} - b|$, lorsque b désigne l'un après l'autre les différents points de l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$. En effet, s'il existe dans ce cas un nombre infini de points $a_{\nu'}$ pour

lesquels $|a_{\nu'} - b_{\nu'}| \geqq \theta$, il existe aussi toujours un point b' tel, que dans chaque entourage de ce point, se trouvent des points $a_{\nu'}$. Ce point appartient par conséquent à l'ensemble R', mais peut aussi appartenir à $R^{(2)}$, $R^{(3)}$, ... etc. Dans tous les cas on peut toujours trouver dans la série $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, ..., $R^{(\alpha)}$, ..., $R^{(\gamma)}$ le dernier ensemble $R^{(\alpha')}$, qui contient le point b', et l'on peut toujours, par conséquent, fixer une quantité positive et suffisamment petite $\theta' < \theta$ de manière que le nombre α correspondant à chacun des points en nombre infini $a_{\nu'_\alpha}$, situés à l'intérieur du domaine $|x - b'| \leqq \theta'$, est un nombre qui précède α' et que b' appartienne par conséquent à l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$; mais $b_{\nu'_\alpha}$ appartient aussi à l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$ et $|a_{\nu'_\alpha} - b_{\nu'_\alpha}|$ est un minimum, d'où il résulte que $|a_{\nu'_\alpha} - b_{\nu'_\alpha}| \leqq |a_{\nu'_\alpha} - b'| < \theta$; mais cela est contraire à la supposition préliminaire $|a_{\nu'} - b_{\nu'}| \geqq \theta$. Si l'on choisit par conséquent b_{ν_α} de manière que $|a_{\nu_\alpha} - b_{\nu_\alpha}|$ soit égal à la valeur minimum qu'obtient $|a_{\nu_\alpha} - b|$, lorsque b parcourt tout l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$, on aura toujours $\lim\limits_{\nu=\infty} |a_\nu - b_\nu| = 0$, et il est possible par conséquent de fixer les quantités b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ de manière que

$$\lim_{\nu=\infty} (|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0.$$

S'il se trouve des points, situés en dehors du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\gamma)}$, les quantités b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ peuvent être fixées d'une infinité de manières différentes, de sorte que $\lim\limits_{\nu=\infty} (|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0$, sans que l'on ait besoin pour cela d'égaler à zéro tous les β_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Si l'on a par exemple $\gamma = \bar{\alpha} + 1$ et si $R^{(\gamma)}$ est un cercle qui a le point $x = 0$ pour centre, on peut procéder de la manière suivante.[1] On adjoint à chaque point a_{ν_α} où α précède $\bar{\alpha}$, un point b_{ν_α} tel, que $|a_{\nu_\alpha} - b_{\nu_\alpha}|$ soit égal au minimum de toutes les valeurs de $|a_{\nu_\alpha} - b|$, lorsque b parcourt l'un après l'autre tous les points de l'ensemble $R^{(\alpha+1)}$. Si $\mathfrak{C} + R - R^{(\gamma)}$ contient le point $x = 0$, on prend enfin tous les points $b_{\nu_{\bar{\alpha}}} = \infty$. Et si, d'un autre côté, $\mathfrak{C} + R - R^{(\gamma)}$ ne contient pas $x = 0$, mais au contraire $x = \infty$, on pose $b_{\nu_{\bar{\alpha}}} = 0$.

([1]) Cf. page 25.

Maintenant qu'à chaque point a_{ν_a} qui n'est ni zéro ni infini et qui n'appartient pas à un ensemble fini $R^{(a)} - R^{(a+1)}$, il correspond un nouveau point b_{ν_a}, situé en dehors ou sur la limite du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(a+1)}$ et choisi de manière que la limite supérieure de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots$ soit une quantité finie, et que $\lim\limits_{\nu=\infty}(|a_\nu - b_\nu| - \beta_\nu) = 0$, on fixera une série de quantités positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ dont la somme est finie, et une seconde série de quantités positives $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(\nu)}, \ldots$ telles que $\lim\limits_{\nu=\infty}\varepsilon^{(\nu)} = 1$. Fixons de plus une série de nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_\nu, \ldots$ qui peuvent être positifs ou négatifs ou nuls, et qui, du reste, peuvent être choisis arbitrairement, sauf que si $R^{(a)} - R^{(a+1)}$ est un ensemble fini de points, la somme de tous les nombres n correspondant aux différents points de cet ensemble, doit être égale à zéro. Nous formerons ensuite une série de fonctions

$$\mathfrak{G}_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right), \quad \mathfrak{G}_2\left(\frac{1}{x - a_2}\right), \ldots, \mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right), \ldots$$

telles, que $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ soit une fonction entière, rationnelle ou transcendante, de $\frac{1}{x - a_\nu}$, qui s'annule pour $\frac{1}{x - a_\nu} = 0$, et que $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$ ne soit pas identiquement égal à zéro, si $n_\nu \leqq 0$.

A chaque point a_{ν_a} correspond par conséquent une fonction déterminée $(x - a_{\nu_a})^{n_{\nu_a}}\mathfrak{G}_{\nu_a}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_a}}\right)$ ainsi que deux quantités déterminées ε_{ν_a} et $\varepsilon^{(\nu_a)}$. Par conséquent, d'après le théorème B du § 2 les quantités ε_{ν_a} et $\varepsilon^{(\nu_a)}$ permettent de former avec les éléments

$$(x - a_{\nu_a})^{n_{\nu_a}}\mathfrak{G}_{\nu_a}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_a}}\right)$$

une expression analytique $F_x^{(a)}$, pour chaque nombre a qui est égal à zéro ou bien appartient à la première ou à la seconde classe de nombres et précède γ. Cette expression représente à l'intérieur du *continuum* dont la limite complète est constituée par l'ensemble $R^{(a)} - R^{(a+1)}$ et par la première dérivée (selon la notation de Cantor) de cet ensemble, une

fonction monogène uniforme, qui se comporte régulièrement partout à l'intérieur de ce *continuum* et dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_\alpha}$ peut être mise sous la forme

$$(x - a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{G}_{\nu_\alpha}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_\alpha}}\right) + (x - a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_\alpha}).$$

Les expressions $F_x^{(\alpha)}$ que l'on obtient de cette manière peuvent toujours être rangées en série simple $F_x^{\alpha,\mu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots$), où le nouvel indice μ, ajouté à l'expression $F_x^{(\alpha)}$, indique la place qu'elle occupe dans cette série.

On peut maintenant démontrer le théorème suivant:

A. »L'expression $\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu}$ représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_0}$ peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \left[\mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0}) \right] + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0}).$$

Si α' est un nombre de la première ou de la seconde classe, qui précède γ, et que l'on sépare de la série $\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu}$ tous les termes, dont le premier indice correspond à un nombre α précédant α', la série qui reste représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha')}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, laquelle dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_{\alpha'}}$ peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_{\alpha'}})^{n_{\nu_{\alpha'}}} \left[\mathfrak{G}_{\nu_{\alpha'}}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_{\alpha'}}}\right) + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\alpha'}}) \right] + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\alpha'}}).«$$

Soit en effet x_0 un point à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R'$ et ρ une quantité positive suffisamment petite pour que le domaine $|x - x_0| \leq \rho$ ne contienne aucun point appartenant à l'ensemble R, excepté tout au plus le point x_0 lui-même. Si l'on désigne maintenant par δ une quantité positive quelconque, il est toujours possible, en vertu des con-

sidérations développées au § 1 [1], de fixer un nombre n assez grand pour que

$$\sum_{\nu=\nu'}^{\infty} \varepsilon_\nu < \delta$$

et

$$\sum_{\mu=\mu'}^{\infty} \left| F_x^{\alpha,\mu} \right| < \delta$$

dès que $|x - x_0| \leqq \rho$, en même temps que $\nu' \geqq n$, et $\mu' \geqq n$.

On a, par conséquent, dès que $|x - x_0| \leqq \rho$, si x_0 appartient à $\mathfrak{C}$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu} = \mathfrak{P}(x - x_0)$$

et si x_0 coïncide avec un point a_{ν_0} appartenant à l'ensemble $R - R'$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu} = (x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \left[\mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0}) \right] + \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0}).$$

On peut déduire de la même manière les propriétés de la série qui reste, après avoir retranché de $\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu}$ tous les termes dans lesquels α précède α'.

Le théorème $\boldsymbol{A}$ nous permet maintenant de généraliser les théorèmes $\boldsymbol{B'}$ du § 1 et du § 2 de la manière indiquée au commencement de ce paragraphe-ci. Désignons comme auparavant par $F(x)$ une fonction monogène uniforme, dont l'ensemble des points réguliers constitue un *continuum* $\mathfrak{A}$, que limite complètement l'ensemble de points P, composé par la totalité des points singuliers de cette fonction. Indiquons de plus par γ le premier nombre de la première ou de la seconde classe, pour lequel $P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$. J'appellerai R un ensemble de points que je retrancherai du *continuum* $\mathfrak{A} + P$ et qui a les propriétés suivantes: il contient les deux ensembles R' et P et l'on a de plus $R^{(\gamma)} = P^{(\gamma)}$. On voit immédiatement que si α est un nombre quelconque de la première ou de la seconde classe qui précède γ, l'ensemble $R^{(\alpha)}$ embrasse l'ensemble $P^{(\alpha)}$. Il en découle que γ est le premier nombre de la première ou de

[1] Pag. 14 et 27.

la seconde classe, pour lequel $R^{(\gamma)} = R^{(\gamma+1)}$. Je désignerai de même qu'au théorème A, par $\mathfrak{C}$ le *continuum* dont la limite complète est constituée par R. L'ensemble de points $R - R^{(\gamma)}$ a la première puissance; on peut par conséquent, de la même manière qu'au théorème A, désigner par $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ tous les points qui le composent. A chacun de ces points a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, qui n'est ni zéro ni infini, et qui n'appartient pas à un ensemble fini de points $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$, on peut faire correspondre, avec la même signification qu'au théorème A, un nouveau point b_ν, de même qu'une quantité positive $\varepsilon^{(\nu)}$ et une autre quantité positive ε_ν.

On peut de plus adjoindre à chaque point a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ un nombre entier positif ou nul n_ν, qui est soumis aux deux conditions suivantes: 1° si a_ν appartient à l'ensemble $R - R'$ sans appartenir pour cela à P, le nombre correspondant n_ν est toujours positif; et 2° si $R^{(\alpha+1)} = R^{(\gamma)} = 0$, chaque nombre n_ν qui correspond à un point de l'ensemble fini $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ est égal à zéro. Sous tous les autres rapports, les nombres n_ν peuvent être choisis arbitrairement.

La fonction donnée $F(x)$, dans l'entourage immédiat de chaque point a_{ν_0}, appartenant à l'ensemble $R - R'$, peut toujours être mise sous la forme

$$F(x) = (x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + (x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0});$$

à chaque point a_{ν_0} correspond, par conséquent, une fonction parfaitement déterminée $\mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right)$. On peut donc (voir page 43) former à l'aide des quantités b_{ν_0}, ε_{ν_0} et $\varepsilon^{(\nu_0)}$ une expression $F_x^{(0)}$, qui représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière pouvant toujours être égalée, dans le voisinage immédiat de chaque point a_{ν_0}, à

$$(x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right) + (x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0}).$$

La différence

$$F(x) - F_x^{(0)}$$

représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R'$ une fonction monogène,

uniforme et régulière, qui dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_0}$ peut toujours être mise sous la forme $(x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_0})$. De son côté, cette dernière fonction peut toujours dans l'entourage de chaque point a_{ν_1} appartenant à l'ensemble $R^{(1)} - R^{(2)}$ être égalée à

$$(x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}} \mathfrak{G}_{\nu_1}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_1}}\right) + (x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_1}).$$

On peut à l'aide des quantités b_{ν_1} et des nombres ε_{ν_1}, $\varepsilon^{(\nu_1)}$, former avec les éléments $\mathfrak{G}_{\nu_1}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_1}}\right)$ et les nombres correspondants n_{ν_1} une expression analytique $F_x^{(1)}$, laquelle représente à l'intérieur de $\mathfrak{C} + R - R^{(1)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, pouvant être égalée, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_1}$, à

$$(x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}} \mathfrak{G}_{\nu_1}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_1}}\right) + (x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_1}).$$

La différence $F(x) - F_x^{(0)} - F_x^{(1)}$ représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(2)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière qui dans le voisinage de chaque point $x = a_{\nu_1}$ peut être mise sous la forme $(x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_1})$ et, dans le voisinage de chaque point $x = a_{\nu_2}$ appartenant à l'ensemble $R^{(2)} - R^{(3)}$, peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_2})^{n_{\nu_2}} \mathfrak{G}_{\nu_2}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_2}}\right) + (x - a_{\nu_2})^{n_{\nu_2}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_2}).$$

En continuant le même procédé, on forme successivement les nouvelles expressions $F_x^{(2)}, F_x^{(3)}, \ldots, F_x^{(\chi)}, \ldots$ dont la somme $\sum_{\chi=0}' F_x^{(\chi)}$ représente à l'intérieur de $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, grâce à la manière dont chacune des expressions $F_x^{(\chi)}$ a été formée par l'intermédiaire des nombres ε_{ν_χ} et $\varepsilon^{(\nu_\chi)}$ et des quantités b_{ν_χ}. Cette somme a de plus les propriétés suivantes.

Si l'on pose

$$\sum_{\chi=0}^{\chi=\infty} F_x^{(\chi)} = \sum_{\chi=0}^{\chi=\chi'} F_x^{(\chi)} + \sum_{\chi=\chi'+1}^{\infty} F_x^{(\chi)}$$

les expressions

$$F(x) - \sum_{\chi=0}^{\chi=\chi'} F_x^{(\chi)}$$

et

$$\sum_{\chi=\chi'+1}^{\infty} F_x^{(\chi)}$$

représentent toutes les deux, à l'intérieur de $\mathfrak{C} + R - R^{(\chi'+1)}$ des fonctions monogènes, uniformes et régulières, dont la première peut toujours être égalée à

$$(x - a_{\nu_{\chi'}})^{n_{\nu_{\chi'}}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\chi'}})$$

dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_{\chi'}}$.

La différence

$$F(x) - \sum_{\chi=0}^{\chi=\infty} F_x^{(\chi)}$$

représente aussi à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\omega)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière. On a par conséquent dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_\omega}$, appartenant à l'ensemble de points $R^{(\omega)} - R^{(\omega+1)}$

$$F(x) - \sum_{\chi=0}^{\chi=\omega} F_x^{(\chi)} = (x - a_{\nu_\omega})^{n_{\nu_\omega}} \mathfrak{G}_{\nu_\omega}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_\omega}}\right) + (x - a_{\nu_\omega})^{n_{\nu_\omega}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_\omega}).$$

En se servant des quantités b_{ν_ω}, ε_{ν_ω} et $\varepsilon^{(\nu_\omega)}$, on peut toujours former une expression $F_x^{(\omega)}$, représentant à l'intérieur de $\mathfrak{C} + P - P^{(\omega)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_\omega}$, peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_\omega})^{n_{\nu_\omega}} \mathfrak{G}_{\nu_\omega}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_\omega}}\right) + (x - a_{\nu_\omega})^{n_{\nu_\omega}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_\omega}).$$

On peut continuer ce même procédé et former les expressions $F_x^{(\omega)}, F_x^{(\omega+1)}, \ldots, F_x^{(\alpha)}, \ldots$ où α désigne successivement l'un après l'autre tous les nombres entiers de la première ou de la seconde classe qui précèdent γ. Si l'on range ensuite les expressions

$$F_x^{(0)}, F_x^{(1)}, \ldots, F_x^{(\alpha)}, \ldots$$

en série simple, et que l'on marque la place qu'occupe chacune de ces expressions dans cette série par un nouvel indice supérieur, la somme

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu}$$

aura les propriétés suivantes:

1° Elle représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, de x.

2° Si l'on pose

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu} = \sum_{(1)}^{\alpha'} F_x^{\alpha,\mu} + \sum_{(2)}^{\alpha'} F_x^{\alpha,\mu}$$

où α' est un nombre qui précède γ et où $\sum\limits_{(1)}^{\alpha'}$ désigne la somme de tous les termes de $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu}$, dont le premier indice précède α', tandis que $\sum\limits_{(2)}^{\alpha'}$ désigne la somme de tous les termes, dont le premier indice ne précède pas α', les expressions

$$F(x) - \sum_{(1)}^{\alpha'} F_x^{\alpha,\mu}$$

et

$$\sum_{(2)}^{\alpha'} F_x^{\alpha,\mu}$$

représentent des fonctions, qui toutes les deux sont monogènes, uniformes et régulières à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha')}$. Si α' est un nombre tel, qu'il existe un autre nombre qui le précède immédiatement, ou, en d'autres termes, $\alpha' = \bar{\alpha}' + 1$, la première de ces deux fonctions, dans l'entourage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_{\bar{\alpha}'}}$, peut toujours être mise sous la forme

$$(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}'}})^{\lambda_{\bar{\alpha}'}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}'}}).$$

3° La différence

$$F(x) - \sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{\alpha,\mu}$$

représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\gamma)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière. S'il existe pour le nombre γ un autre nombre,

qui le précède immédiatement, c'est-à-dire si $\gamma = \bar{\alpha} + 1$, la fonction considérée peut, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_{\bar{\alpha}}}$, être égalée à

$$(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}}})^{\lambda_{\nu_{\bar{\alpha}}}} \mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}}}).$$

Si $P^{(\gamma)} = 0$, la différence

$$F(x) - \sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{a,\mu}$$

représente une fonction qui est monogène, uniforme et régulière dans tout le domaine de la variable x. Mais une telle fonction est nécessairement constante, et on a par conséquent dans ce cas

$$F(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} F_x^{a,\mu} + C.$$

Le résultat que nous venons d'obtenir peut se formuler dans le théorème suivant:

A'. »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme de la variable x. Désignons par $\mathfrak{A}$ le *continuum* composé par l'ensemble de tous les points réguliers de cette fonction, par P l'ensemble de ses points singuliers et par γ le premier nombre de la première ou de la seconde classe, pour lequel $P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$.

Soit de plus R un ensemble de points appartenant au *continuum* $\mathfrak{A} + P$, qui renferme les deux ensembles R' et P et pour lequel $R^{(\gamma)} = P^{(\gamma)}$, mais qui, pour tout le reste, peut être choisi arbitrairement.

Il est toujours possible de former une expression analytique, représentant une fonction monogène uniforme qui se comporte régulièrement partout à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A}$ et qui, dans le voisinage immédiat de chaque point appartenant à l'ensemble $R - R^{(\gamma)}$, coïncide avec $F(x)$ à un degré de précision voulu[1] et qui, de plus, est telle, que la différence entre elle et $F(x)$ représente, à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + P - P^{(\gamma)}$ complètement limité par l'ensemble de points $P^{(\gamma)}$, une nouvelle fonction monogène et uniforme.»

Les théorèmes ***A*** et ***A'*** que je viens d'établir constituent la généralisation des théorèmes ***B*** et ***B'*** du § 2, que j'ai annoncée au commen-

---

[1] Ce que je veux dire par là est suffisamment éclairci par l'exposition qui précède.

cement de ce paragraphe. Le cas où γ est un nombre de la première classe, $P^{(\gamma)} = 0$ et tous les nombres n_ν sont nuls, a été démontré par moi dans le Bulletin (Öfversigt) des travaux de l'Académie des sciences de Suède (8 Février 1882), ainsi que dans les Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences à Paris, 3, 24, 17 Avril 1882.[1]

Voyons maintenant comment on peut, d'une manière exactement semblable, établir deux nouveaux théorèmes généralisant les théorèmes C et C' du § 2.

Nous désignerons toujours par $\mathfrak{C}$ un *continuum* limité complètement par l'ensemble de points R, où nous supposons que γ est le premier nombre de la première ou de la seconde classe pour lequel $R^{(\gamma)} = R^{(\gamma+1)}$. Soient de plus $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ les différents points, dont la totalité compose l'ensemble $R - R^{(\gamma)}$. On peut maintenant, avec la même signification que précédemment, adjoindre aux points $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ de nouveaux points $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$ et deux séries de quantités positives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ et $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \ldots, \varepsilon^{(\nu)}, \ldots$. On doit de plus annexer à chaque point a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ deux nombres entiers m_ν et n_ν, positifs, négatifs ou nuls et choisis arbitrairement, avec cette seule restriction que si $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ est un ensemble fini de points, la somme de tous les nombres m_{ν_α} correspondant aux différents points de cet ensemble, doit être égale à zéro, et celle de tous les nombres n_{ν_α} correspondant à ces mêmes points est aussi égale à zéro. Adjoignons enfin à chaque point a_ν une fonction entière, rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x - a_\nu}$, $\mathfrak{G}_\nu\left(\frac{1}{x - a_\nu}\right)$, qui s'annule pour $\frac{1}{x - a_\nu} = 0$, mais qui n'est pas identiquement égale à zéro si $n_\nu \leqq 0$.

A chaque point a_{ν_α}, appartenant à l'ensemble $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ correspond alors[2] une expression déterminée

$$(x - a_{\nu_\alpha})^{m_{\nu_\alpha}} e^{(x - a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{G}_{\nu_\alpha}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_\alpha}}\right)}$$

de même que deux quantités déterminées ε_{ν_α} et $\varepsilon^{(\nu_\alpha)}$. On peut donc toujours, d'après le théorème C du § 2, former une expression analytique

---

[1] Il faut observer que l'ordre de ces articles dans les Comptes rendus etc. a été interverti.

[2] Voir p. 49 et 50.

$f_x^{(\alpha)}$ qui représente, à l'intérieur du *continuum* limité complètement par $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$ et par la première dérivée de cet ensemble, une fonction monogène, uniforme et régulière, ne s'annulant nulle part à l'intérieur de ce *continuum* et pouvant dans le voisinage de chaque point $x = a_{\nu_\alpha}$ être égalée à

$$(x - a_{\nu_\alpha})^{m_{\nu_\alpha}} e^{(x-a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{G}_{\nu_\alpha}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_\alpha}}\right) + (x-a_{\nu_\alpha})^{n_{\nu_\alpha}} \mathfrak{P}(x-a_{\nu_\alpha})}.$$

Les expressions $f_x^{(\alpha)}$ que l'on obtient ainsi peuvent toujours être rangées en série simple $f_x^{\alpha,\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$.

Si l'on forme maintenant le produit $\prod_{\mu=1}^{\infty} f_x^{\alpha,\mu}$, le théorème suivant, contenant une généralisation du théorème C du § 2, a lieu par rapport à ce produit.

B. »Le produit $\prod_{\mu=1}^{\infty} f_x^{\alpha,\mu}$ représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui ne s'annule pour aucun point de ce *continuum* et qui, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_0}$, peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_0})^{m_{\nu_0}} e^{(x-a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}}\left[\mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_0}}\right) + \mathfrak{P}(x-a_{\nu_0})\right] + \mathfrak{P}(x-a_{\nu_0})}.$$

Si α' est un nombre entier de la première ou de la seconde classe qui précède γ, et que l'on sépare du produit $\prod_{\mu=1}^{\infty} f_x^{\alpha,\mu}$ tous les facteurs dont le premier indice correspond à un nombre précédant α', le produit qui reste représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha')}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, laquelle ne s'annule pour aucun point de ce *continuum* et, dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_{\alpha'}}$, peut toujours être égalée à

$$(x - a_{\nu_{\alpha'}})^{m_{\nu_{\alpha'}}} e^{(x-a_{\nu_{\alpha'}})^{n_{\nu_{\alpha'}}}\left[\mathfrak{G}_{\nu_{\alpha'}}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_{\alpha'}}}\right) + \mathfrak{P}(x-a_{\nu_{\alpha'}})\right] + \mathfrak{P}(x-a_{\nu_{\alpha'}})}.«$$

La démonstration de ce théorème découle immédiatement du raisonnement dont nous nous sommes servis pour établir le théorème A de ce paragraphe et le théorème C du paragraphe précédent.

On obtient de même facilement un nouveau théorème, qui contient la généralisation annoncée du théorème C' du § 2. Nous désignerons toujours par $F(x)$ une fonction monogène et uniforme dont l'ensemble des points réguliers constitue le *continuum* $\mathfrak{A}$ et dont les points singuliers forment l'ensemble P. De même qu'au § 2, nous désignerons par $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous les points réguliers qui ne sont pas des points-zéros de cette fonction, et par $\mathfrak{P}$ l'ensemble des points-zéros et des points singuliers; nous désignerons par δ le premier nombre de la première ou de la seconde classe pour lequel $\mathfrak{P}^{(\delta)} = \mathfrak{P}^{(\delta+1)}$. Séparons maintenant du *continuum* $\mathfrak{B} + \mathfrak{P}$ un ensemble de points R qui contient R' et embrasse $\mathfrak{P}$ et pour lequel $R^{(\delta)} = \mathfrak{P}^{(\delta)}$. Soit $\mathfrak{C}$ le *continuum*, dont la limite complète est constituée par R, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ les points différents dont la totalité forme l'ensemble $R - R^{(\delta)}$. Adjoignons à chaque point a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ un nombre entier positif ou nul n_ν, qui sera positif chaque fois que a_ν appartiendra à l'ensemble $R - R'$, sans faire pour cela partie de l'ensemble $\mathfrak{P}$, et qui sera nul dès que $R^{(\alpha+1)} = R^{(\delta)} = 0$ et a_ν appartiendra à l'ensemble fini $R^{(\alpha)} - R^{(\alpha+1)}$.

Dans le voisinage immédiat de chaque point $x = a_{\nu_0}$, appartenant à l'ensemble $R - R'$, la fonction donnée peut toujours être mise sous la forme

$$F(x) = (x - a_{\nu_0})^{m_{\nu_0}} e^{(x-a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_0}}\right) + (x-a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{P}(x-a_{\nu_0})}$$

et le nombre m_{ν_0} est entièrement déterminé par cette égalité; quant à l'expression $(x - a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x - a_{\nu_0}}\right)$, elle est déterminée à une constante additive près, égale à un multiple entier de $2\pi i$. D'après le théorème C du § 2, on peut toujours former une expression $f_x^{(0)}$, représentant à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui n'a pas de points-zéros à l'intérieur de ce *continuum* et qui, dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_0}$, peut être égalée à

$$(x - a_{\nu_0})^{m_{\nu_0}} e^{(x-a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{G}_{\nu_0}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_0}}\right) + (x-a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}} \mathfrak{P}(x-a_{\nu_0})}.$$

Le quotient

$$\frac{F(x)}{f_x^{(0)}}$$

représente à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R'$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui n'a pas de points-zéros dans ce *continuum* et qui, dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_0}$, peut être égalée à

$$e^{(x-a_{\nu_0})^{n_{\nu_0}}\mathfrak{P}(x-a_{\nu_0})}.$$

Dans le voisinage immédiat d'un point $x = a_{\nu_1}$ cette fonction a aussi la forme

$$(x - a_{\nu_1})^{m_{\nu_1}} e^{(x-a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{G}_{\nu_1}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_1}}\right) + (x-a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{P}(x-a_{\nu_1})}.$$

Formons maintenant une expression analytique $f_x^{(1)}$, représentant à l'intérieur de $\mathfrak{C} + R - R'$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui ne s'annule jamais à l'intérieur de ce *continuum* et qui, dans le voisinage de chaque point $x = a_{\nu_1}$, peut être mise sous la forme

$$(x - a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}} e^{(x-a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{G}_{\nu_1}\left(\frac{1}{x-a_{\nu_1}}\right) + (x-a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{P}(x-a_{\nu_1})}.$$

Le quotient $\dfrac{F(x)}{f_x^{(0)}f_x^{(1)}}$ représente alors à l'intérieur de $\mathfrak{C} + R - R^{(2)}$ une fonction monogène, uniforme et régulière, qui n'a pas de points-zéros à l'intérieur de ce *continuum* et qui, dans le voisinage de chaque point $x = a_{\nu_1}$, peut être égalée à $e^{(x-a_{\nu_1})^{n_{\nu_1}}\mathfrak{P}(x-a_{\nu_1})}$.

En continuant toujours le même procédé, on obtient une série d'expressions

$$f_x^{(0)},\ f_x^{(1)},\ \ldots,\ f_x^{(\alpha)},\ \ldots$$

qui peuvent toujours être rangées en série simple $f_x^{\alpha_\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$.

Le produit $\prod\limits_{\mu=1}^{\prime} f_x^{\alpha_\mu}$ jouit, d'après ce qui vient d'être établi, des propriétés suivantes:

1° Il représente à l'intérieur de $\mathfrak{C}$ une fonction monogène, uniforme et régulière qui n'a pas de points-zéros à l'intérieur de ce *continuum*.

2° Si l'on pose

$$\prod_{\mu=1}^{\prime} f_x^{\alpha_\mu} = \prod_{(1)}^{\alpha'} f_x^{\alpha_\mu} . \prod_{(2)}^{\alpha'} f_x^{\alpha_\mu}$$

où α' précède ∂ et où $\prod_{(1)}^{\alpha'}$ désigne le produit de tous les facteurs de $\prod_{\mu=1}^{\infty} f_x^{\alpha,\mu}$ dont le premier indice précède α', tandis que $\prod_{(2)}^{\alpha'}$ représente le produit des facteurs, dans lesquels le premier indice ne précède pas α', les expressions

$$\frac{F(x)}{\prod_{(1)}^{\alpha'} f_x^{\alpha,\mu}}$$

et

$$\prod_{(2)}^{\alpha'} f_x^{\alpha,\mu}$$

représenteront des fonctions qui, à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{C} + R - R^{(\alpha')}$, sont toutes les deux monogènes, uniformes et régulières et ont partout une valeur différente de zéro. Si $\alpha' = \bar{\alpha}' + 1$, la première de ces deux fonctions peut aussi, dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_{\bar{\alpha}'}}$, être égalée à $e^{(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}'}})^{n_{\nu_{\bar{\alpha}'}}}\mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}'}})}$.

3° Le quotient

$$\frac{F(x)}{\prod_{\mu=1}^{\infty} f_x^{\alpha,\mu}}$$

représente à l'intérieur du *continuum*

$$\mathfrak{C} + R - R^{(\partial)} = \mathfrak{B} + \mathfrak{p} - \mathfrak{p}^{(\partial)}$$

une fonction monogène, uniforme et régulière, qui n'a pas de points-zéros à l'intérieur de ce *continuum* et qui peut être mise sous la forme $e^{(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}}})^{n_{\nu_{\bar{\alpha}}}}\mathfrak{P}(x - a_{\nu_{\bar{\alpha}}})}$ dans l'entourage de chaque point $x = a_{\nu_{\bar{\alpha}}}$, en supposant $\partial = \bar{\alpha} + 1$.

Si $\mathfrak{p}^{(\partial)} = 0$, le quotient $\dfrac{F(x)}{\prod_{\mu=1}^{\infty} f_x^{\alpha,\mu}}$ sera, par conséquent, égal à une constante.

Je peux donc formuler le théorème suivant:

B'. »Soit $F(x)$ une fonction monogène uniforme de la variable x. Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble de tous ses points réguliers, qui ne sont pas en même

temps des points-zéros, et $\mathfrak{P}$ l'ensemble de tous ses points singuliers et de tous ses points-zéros. Soit enfin δ le premier nombre de la première ou de la seconde classe, pour lequel $\mathfrak{P}^{(\delta)} = \mathfrak{P}^{(\delta+1)}$.

Je désigne par R un ensemble de points, qui appartient au *continuum* $\mathfrak{B} + \mathfrak{P}$, embrassant R' et $\mathfrak{P}$ et pour lequel $R^{(\delta)} = \mathfrak{P}^{(\delta)}$, mais qui, quant au reste, peut être choisi tout à fait arbitrairement.

Il est toujours possible de former une expression analytique, représentant une fonction monogène uniforme, laquelle à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{B}$ se comporte partout régulièrement et a une valeur différente de zéro; dans le voisinage immédiat de chaque point de l'ensemble $R - R^{(\delta)}$, cette fonction peut coïncider avec $F(x)$ au degré d'exactitude voulu et elle est de plus telle, que le quotient qui résulte de sa division par $F(x)$ est une nouvelle fonction, qui est monogène, uniforme et régulière à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}^{(\delta)}$ dont la limite complète est constituée par l'ensemble $\mathfrak{P}^{(\delta)}$, et qui ne s'annule jamais à l'intérieur de ce *continuum*.»

En vertu des deux théorèmes A' et B', on peut toujours représenter chaque fonction monogène uniforme sous deux formes essentiellement différentes.

D'après le théorème A' on a, à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{A} + P - P^{(\gamma)}$,

$$F(x) = F_x + C(x)$$

et il est toujours possible de former l'expression F_x de façon que $C(x)$ soit une fonction monogène uniforme, se comportant régulièrement partout à l'intérieur de ce *continuum*.

D'après le théorème B' on a, à l'intérieur du *continuum* $\mathfrak{B} + \mathfrak{P} - \mathfrak{P}^{(\delta)}$,

$$F(x) = f_x . c(x)$$

et on peut toujours former l'expression f_x de sorte que $c(x)$ soit une fonction monogène uniforme, qui, à l'intérieur du *continuum* en question, se comporte partout régulièrement et conserve toujours une valeur différente de zéro.

Les deux fonctions $C(x)$ et $c(x)$ deviennent des constantes indépendantes de x dans le cas où $P^{(\gamma)} = 0$. Mais si cette égalité n'a pas lieu, et que $P^{(\gamma)} = P^{(\gamma+1)}$ soit l'ensemble de tous les points singuliers de $C(x)$ et

que $\mathfrak{P}^{(\delta)} = \mathfrak{P}^{(\delta+1)}$ soit l'ensemble de tous les points singuliers de $c(x)$, on obtient un groupe déterminé de fonctions, caractérisé par cette propriété même.

Dans une autre occasion, je ferai ressortir les propriétés remarquables qui appartiennent à toutes les fonctions de ce groupe, et qui sont liées étroitement aux recherches exposées dans ce mémoire.

Avant de terminer, je ferai remarquer que les théorèmes $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ de ce paragraphe peuvent immédiatement être généralisés de la même manière que le théorème $\boldsymbol{A}$ du § 1. En d'autres termes, on peut choisir l'ensemble de points P avec la seule restriction que l'égalité $P - P' = 0$ n'ait pas lieu. La condition que P forme la limite complète d'un *continuum* $\mathfrak{A}$ composé d'une seule pièce, n'est point obligatoire, et, en la négligeant, on ne change pas essentiellement les théorèmes obtenus.

DÉMONSTRATION NOUVELLE
DU THÉORÈME DE LAURENT

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

À STOCKHOLM.

Dans son célèbre mémoire: *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen,* WEIERSTRASS a démontré le théorème suivant:

A. »Soit $f(x)$ une fonction monogène uniforme de la variable x, possédant les n points singuliers essentiels $c_1, \ldots, c_n$.

Il est toujours possible de représenter cette fonction sous la forme suivante:

On construit une fonction rationnelle du degré n de la variable x, $y = \varphi(x)$, possédant les pôles $c_1, \ldots, c_n$. On forme ensuite, ce qui est toujours possible, n fonctions monogènes et uniformes de la variable y, $F_0(y)$, $F_1(y)$, $\ldots$, $F_{n-1}(y)$, n'ayant pas d'autre point singulier essentiel que $y = \infty$, constituant en outre des fonctions entières rationnelles ou transcendantes quand $f(x)$ ne possède pas de pôles, et étant enfin telles, que l'on a partout l'égalité

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(y)\left(\frac{1}{x-c}\right)^\nu,$$

où la constante c désigne l'une des n valeurs $c_1, \ldots, c_n$.»

Si $c = \infty$, on entend, comme toujours chez WEIERSTRASS, par $x - \infty$ l'expression $\frac{1}{x}$.

Ce théorème ne paraît pas avoir été jusqu'ici l'objet de l'attention qu'il mérite à tous égards. La raison en est peut-être qu'il figure chez WEIERSTRASS principalement comme théorème auxiliaire, servant à démontrer le théorème suivant:

B. »Soit $f(x)$ une fonction monogène uniforme de la variable x, ayant pour points singuliers $c_1, \ldots, c_n$. Cette fonction peut toujours être représentée sous la forme

$$f(x) = C + \sum_{\nu=1}^{n} G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right),$$

où C désigne une constante indépendante de x, et où $G_\nu\left(\frac{1}{x - c_\nu}\right)$ est une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x - a_\nu}$, s'évanouissant, lorsque $\frac{1}{x - c_\nu} = 0$.»

On voit sans peine que le théorème ***B*** découle immédiatement du théorème qui suit, connu sous le nom du théorème de LAURENT.

»Soit, pour $R' < |x| < R''$, où l'on entend par R' et R'' des quantités positives données, $f(x)$ une fonction monogène, uniforme et régulière de la variable x. Il est toujours possible de constituer une série $\sum\limits_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} A_\mu x^\mu$, dont les coefficients sont indépendants de x, et qui est telle, en outre, que l'égalité

$$f(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} A_\mu x^\mu$$

a lieu partout pour $R' < |x| < R''$.»

Le théorème de LAURENT se laisse facilement dériver de la théorie des intégrales définies, et il n'est alors qu'un simple corollaire d'un théorème de CAUCHY.

Démontré de cette façon, le théorème de LAURENT ne reçoit cependant pas, dans la théorie des fonctions, la place élémentaire qui semble devoir lui appartenir.

Il paraît que par cette raison et afin de ne pas abandonner l'ordre d'idées auxquelles appartiennent les recherches consignées dans le mémoire:

Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, Weierstrass a déduit le théorème ***B*** du théorème ***A***, au lieu de passer par le théorème de Laurent.[1] Si, comme je l'ai fait dans divers mémoires, on poursuit la voie ouverte par Weierstrass, on constate cependant bientôt qu'il est impossible de se passer du théorème de Laurent. Il n'est toutefois pas nécessaire d'abandonner pour le reste les considérations élémentaires dont se sert Weierstrass.

Il y a donc une importance réelle à démontrer le théorème de Laurent sans recourir au calcul intégral, et sans abandonner les éléments de la théorie des fonctions.

On peut obtenir cette démonstration en présentant le théorème ***A*** sous une autre forme que chez Weierstrass. Si l'on examine de plus près la méthode dont le grand géomètre se sert pour déduire le théorème ***A***, on voit sans peine qu'il a démontré en même temps le théorème suivant, qu'il n'énonce toutefois pas sous une forme explicite.

C. »Soit dans un *continuum* $\mathfrak{A}$, composé d'une seule pièce, $f(x)$ une fonction monogène uniforme, qui ne possède en $\mathfrak{A}$ aucun point singulier essentiel. Soit ensuite $y = \varphi(x)$ une fonction rationnelle du degré n de la variable x, qui se comporte d'une façon régulière en dedans de $\mathfrak{A}$. Les valeurs de y obtenues de l'égalité $y = \varphi(x)$, quand x signifie successivement la totalité des points du *continuum* $\mathfrak{A}$, constituent, réunies, dans le domaine de la variable y, un *continuum* $\mathfrak{B}$ se composant d'une seule pièce. Supposons que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ correspondent entre eux de façon que toutes les valeurs de x satisfaisant à l'égalité $y = \varphi(x)$ pour une valeur donnée de y située en dedans de $\mathfrak{B}$, soient elles-mêmes situées en dedans de $\mathfrak{A}$.

Désignons par c un point quelconque, situé sur la limite de $\mathfrak{A}$ ou en dehors de $\mathfrak{A}$. Il est toujours possible de construire n fonctions $F_0(y)$, $F_1(y)$, ..., $F_{n-1}(y)$, qui constituent en $\mathfrak{B}$ des fonctions monogènes uniformes de la variable y, ne possédant pas de point singulier essentiel, et pouvant être choisies de façon que l'égalité $f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} F_\nu(y) \cdot \frac{1}{(x-c)^\nu}$ pour $y = \varphi(x)$, a lieu partout en dedans de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$. Si la fonction

(1) Voir la note, page 47 du dit travail.

$f(x)$ n'a pas de pôles dans le domaine $\mathfrak{A}$, il en est de même, dans le domaine $\mathfrak{B}$, de chacune des fonctions $F_0(y)$, $F_1(y)$, ..., $F_{n-1}(y)$.»

De ce théorème, celui de LAURENT peut être déduit de la manière suivante.

Posons

$$y = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{x}\right)^n\right],$$

où R signifiera une quantité positive donnée, et n un nombre entier positif donné.

L'équation

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{x}\right)^n\right] - y = \varphi(x) - y = 0$$

considérée par rapport à x, n'a de racines égales que dans le cas où $\varphi'(x) = 0$. Or, ce cas se présente toujours et exclusivement, lorsque $\left(\frac{x}{R}\right)^n = \pm 1$, et, par conséquent, lorsque $y = \pm 1$. Quand $y = +1$ les différentes racines de l'équation $\varphi(x) - y = 0$, se déduisent de l'expression $R.e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, en donnant à k les valeurs successives $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Chacune de ces racines est une racine double. Quand $y = -1$, l'expression $R.e^{\frac{(2k+1)\pi i}{n}}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ représente les racines différentes de l'équation $\varphi(x) - y = 0$, et chacune de ces racines est aussi une racine double.

Donnons maintenant à y une valeur finie y', qui n'est égale ni à $+1$, ni à -1. Si x' est une valeur correspondante de x, telle que $\varphi(x') - y' = 0$, l'égalité $\varphi(x) - y' = 0$ a lieu pour

$$x = e^{\frac{2k\pi i}{n}}.x', \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

et en outre pour

$$x = e^{\frac{2k\pi i}{n}}.\frac{R^2}{x'}. \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

Ces deux expressions donnent par conséquent les $2n$ racines de l'égalité $\varphi(x) - y' = 0$.

En faisant donc parcourir à x toutes les valeurs remplissant la condition $\left|\frac{x}{R}\right| = 1$, ou étant situées sur la circonférence d'un cercle dans le plan de x ayant l'origine pour centre et R pour rayon, on verra y parcourir simultanément toutes les valeurs réelles à partir de $+ 1$ jusqu'à $- 1$. Toutes les valeurs de x qui répondent à une valeur réelle de y telle que $- 1 \leqq y \leqq + 1$ appartiennent aussi à la circonférence $\left|\frac{x}{R}\right| = 1$.

De même, si l'on fait parcourir à x toutes les valeurs qui remplissent la condition $\left|\frac{x}{R}\right| = 1 + \delta$, où δ est une quantité positive donnée, et qui constituent par suite les points différents d'une circonférence dans le plan de x, dont le centre est à l'origine et dont le rayon est $R(1 + \delta)$, y parcourra simultanément dans le plan de y tous les points d'une courbe fermée, symétrique par rapport tant à l'axe des ordonnées qu'à l'axe des abscisses et limitant une surface simplement connexe, laquelle renferme $y = + 1$. La même courbe est aussi décrite par y quand x parcourt toutes les valeurs remplissant la condition $\left|\frac{R}{x}\right| = 1 + \delta$, et constituant par suite, dans le plan de x, les différents points d'une circonférence dont le centre est à l'origine et dont le rayon est $\frac{R}{1 + \delta}$. D'un autre côté, à chaque point y appartenant à la courbe mentionnée du plan de y correspondent n points différents x, situés sur la circonférence ayant $R(1 + \delta)$ pour rayon, et n autres points également différents les uns des autres, situés sur la circonférence ayant $\frac{R}{1 + \delta}$ pour rayon. On voit aussi que la plus grande distance de l'origine à un point de la courbe indiquée dans le plan de y est

$$\frac{1}{2}\left[(1 + \delta)^n + \frac{1}{(1 + \delta)^n}\right]$$

et que la plus petite distance est $\frac{1}{2}\left[(1 + \delta)^n - \frac{1}{(1 + \delta)^n}\right]$.

Il suit de ce qui précède que, à l'anneau circulaire dans le plan de x situé entre les deux circonférences $|x| = R(1 + \rho)$ et $|x| = \frac{R}{1 + \rho}$, si l'on entend par ρ une quantité positive donnée, correspond, dans le plan de

y, une surface simplement connexe, symétrique par rapport tant à l'axe des ordonnées qu'à l'axe des abscisses, surface enfermant le point $y = +1$, et dont la ligne limite est telle, que la plus grande distance entre un point de cette limite et l'origine est $\frac{1}{2}\left[(1+\rho)^n + \frac{1}{(1+\rho)^n}\right]$, et la plus petite distance est $\frac{1}{2}\left[(1+\rho)^n - \frac{1}{(1+\rho)^n}\right]$.

Désignons maintenant l'anneau circulaire par $\mathfrak{A}$, et par $\mathfrak{B}$ la surface correspondante du plan de y. Tous les points du plan de x correspondant à un point du plan de y, situé en dedans de $\mathfrak{B}$, sont eux-mêmes toujours situés en dedans de $\mathfrak{A}$ et tous les points correspondant à un point situé sur la limite de $\mathfrak{B}$ sont eux-mêmes situés sur la limite de $\mathfrak{A}$. La fonction

$$y = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{x}\right)^n\right]$$

ne possède aussi que des points réguliers en dedans de $\mathfrak{A}$ et sur la limite de $\mathfrak{A}$. Cette fonction est par conséquent une fonction $y = \varphi(x)$ telle que nous l'avons supposée dans le théorème ***C***.

La quantité ρ étant fixée, il est toujours possible de donner à n une valeur assez grande pour que

$$\frac{1}{2}\left[(1+\rho)^n - \frac{1}{(1+\rho)^n}\right] > 1 + h,$$

en désignant par h une quantité positive quelconque. En admettant ensuite une quantité ε assez petite pour que

$$\frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon)^n + \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\right] < 1 + h$$

la surface qui dans le plan de y répond à l'anneau circulaire

$$\frac{R}{1+\varepsilon} \leqq |x| \leqq R(1+\varepsilon)$$

est située en dedans d'un cercle qui a l'origine pour centre et $1 + h$ pour rayon.

Après ces remarques préliminaires, j'obtiens facilement le théorème de LAURENT. Soit, pour toutes les valeurs de x qui remplissent la condition $R' < |x| < R''$, $f(x)$ une fonction monogène, uniforme et régulière de la variable x.

Fixons d'une manière arbitraire une quantité positive R telle que $R' < R < R''$. Posons ensuite une quantité positive ρ telle que

$$R(1 + \rho) < R'' \text{ et que } \frac{R}{1 + \rho} > R'.$$

Désignons par $\mathfrak{A}$ l'anneau circulaire

$$\frac{R}{1 + \rho} < |x| < R(1 + \rho)$$

et par h une quantité positive arbitraire. Choisissons le nombre entier positif n si grand que

$$\frac{1}{2}\left| (1 + \rho)^n - \frac{1}{(1 + \rho)^n} \right| > 1 + h$$

et indiquons par $\mathfrak{B}$ le domaine de la variable y qu'on déduit de l'égalité

$$y = \frac{1}{2}\left| \left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{x}\right)^n \right|$$

en faisant parcourir à x le domaine $\mathfrak{A}$.

Conformément au théorème $\boldsymbol{C}$ on obtient alors l'égalité

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n-1} F_\nu(y) \left(\frac{1}{x - c}\right)^\nu$$

où c est un point en dedans ou sur la limite du domaine $\mathfrak{A}$ et où les fonctions $F_\nu(x)$ en dedans du domaine $\mathfrak{B}$ sont des fonctions monogènes, uniformes et régulières de la variable y. Le domaine $\mathfrak{B}$ enferme totalement un cercle ayant l'origine pour centre et $1 + h$ pour rayon. On a donc pour ce cercle

$$F_\nu(y) = A_0^{(\nu)} + A_1^{(\nu)} y + A_2^{(\nu)} y^2 + \dots,$$

où $A_0^{(\nu)}$, $A_1^{(\nu)}$, ... sont des constantes indépendantes de y et $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}(1+h)^\mu$ est une série à convergence absolue. Si ε représente une quantité positive suffisamment petite pour que

$$\frac{1}{2}\left[(1+\varepsilon)^n + \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^n\right] < 1 + h,$$

le module de y sera toujours inférieur à $1+h$, dès que x appartiendra à l'anneau circulaire $\frac{R}{1+\varepsilon} \leqq |x| \leqq R(1+\varepsilon)$. La série $\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\varphi(x)^\mu$, où

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{x}\right)^n\right],$$

est par suite uniformément convergente pour toutes les valeurs de x appartenant à l'anneau circulaire qui vient d'être mentionné. Ainsi par suite d'un théorème connu, ([1]) on a dans cet anneau circulaire

$$F_\nu(y) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)}\varphi(x)^\mu = G_\nu(x) + \overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $G_\nu(x)$ est une série procédant d'après les puissances positives de x, et convergente aussitôt que $|x| \leqq R(1+\varepsilon)$, et $\overline{G}_\nu\left(\frac{1}{x}\right)$ est une série procédant d'après les puissances négatives de x, et convergente dès que $|x| \geqq \frac{R}{1+\varepsilon}$.

Vu l'égalité

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{2n-1} F_\nu(y) \cdot \left(\frac{1}{x-c}\right)^\nu,$$

on aura donc, pour l'anneau circulaire $\frac{R}{1+\varepsilon} \leqq |x| \leqq R(1+\varepsilon)$, l'égalité

$$f(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} A_\mu x^\mu.$$

([1]) K. Weierstrass: *Zur Funktionenlehre.* Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, August 1880, p. 7.

Or il est évident, d'un côté, que l'égalité ci-dessus aura lieu partout à l'intérieur de l'anneau circulaire constituant le domaine de convergence commun des séries $\sum_{\mu=1}^{\infty} A_{-\mu}x^{-\mu}$ et $\sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu}x^{\mu}$, et, de l'autre, que ces deux séries doivent converger dans l'anneau, en dedans duquel $f(x)$ est une fonction monogène, uniforme et régulière de x. L'égalité

$$f(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} A_{\mu}x^{\mu}$$

a donc lieu non seulement pour le domaine $\frac{R}{1+\varepsilon} \leqq |x| \leqq R(1+\varepsilon)$, mais aussi pour le domaine $R' < |x| < R''$. Le théorème de LAURENT se trouve ainsi complètement démontré.

SUR UN DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE

PAR

CH. HERMITE et L. FUCHS.

1. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite par M. Fuchs.

Peut-être vous intéressera-t-il de voir la manière dont je me suis démontré votre théorème ainsi énoncé:

»Soit α et β deux exposants dont la somme $\alpha + \beta = k$, k étant entier et positif, et $\frac{B}{A}$ la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de $(x-a)^\alpha(x-b)^\beta$. Les polynômes A et B, des degrés n et $n+k$, se déterminent sauf un facteur constant en posant:

$$\text{(I)} \qquad D_x^n[(x-a)^{n+\alpha}(x-b)^{n+\beta}] = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta A$$

$$\text{(II)} \qquad D_x^{n+k}[(x-a)^{n+k-\alpha}(x-b)^{n+k-\beta}] = (x-a)^{-\alpha}(x-b)^{-\beta} B.$$

D'abord comme on peut changer l'expression $(x-a)^\alpha(x-b)^\beta$ au moyen d'une substitution linéaire et entière en $t^\alpha(1-t)^\beta$, je considère immédiatement une telle expression, ou plutôt $x^\lambda(1-x)^\mu$, en mettant λ et μ au lieu de α et β.

Je me restreindrai à la démonstration de la formule (I), parce qu'on peut procéder de la même manière pour prouver la seconde.

Il suit d'une formule donnée par JACOBI, dans un mémoire posthume (Journal de BORCHARDT T. 56, p. 149, § 3), que l'on a l'équation:

$$(1) \qquad D_x^n[x^{n+\lambda}(1-x)^{n+\mu}]$$

$$= (1+\lambda)(2+\lambda)\ldots(n+\lambda)x^\lambda(1-x)^\mu F(-n,\ k+n+1,\ 1+\lambda,\ x).$$

Or on peut poser:

$$(2) \quad x^\lambda(1-x)^\mu = G_k(x) + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-k+1)}{1\,.\,2\ldots k}F\left(\lambda,\ 1,\ 1+k,\ \frac{1}{x}\right),$$

$G_k(x)$ étant un polynôme entier du degré k. En développant

$$F\left(\lambda,\ 1,\ k+1,\ \frac{1}{x}\right)$$

en fraction continue, on voit que le dénominateur de la réduite d'ordre n est identique à la quantité A (sauf un facteur constant), et l'on déduit des formules de HEINE (Journal de BORCHARDT T. 57, p. 231, et aussi *Handbuch der Kugelfunctionen*, T. I, chap. V), sauf un facteur constant:

$$(3) \qquad A = F(-n,\ k+n+1,\ 1+\lambda,\ x).$$

On peut donc substituer dans l'équation (1) à la fonction

$$F(-n,\ k+n+1,\ 1+\lambda,\ x),$$

la quantité A, ce qui démontre la première de vos deux formules.

Heidelberg, 17 Octobre 1883.

2. Extrait d'une lettre adressée à M. Fuchs par M. Hermite.

. . . . . Je me permets maintenant de vous communiquer une autre manière de parvenir au résultat que vous avez établi. Sous ce nouveau point de vue, je puis supposer k indifféremment positif ou négatif, j'admettrai seulement lorsque le second cas se presente que $n+k$ soit positif. Cela étant, je pose, en développant suivant les puissances déscendantes de la variable:

$$(x-a)^{n+\alpha}(x-b)^{n+\beta} = P + \frac{\varepsilon}{x} + \frac{\varepsilon'}{x^2} + \dots$$

P désignant la partie entière, et je prends les dérivées d'ordre n des deux membres de cette égalité.

J'obtiens ainsi

$$D_x^n[(x-a)^{n+\alpha}(x-b)^{n+\beta}] = (x-a)^\alpha(x-b)^\beta A$$

$$= D_x^n P + \frac{\eta}{x^{n+1}} + \frac{\eta'}{x^{n+2}} + \dots$$

et cette relation met immédiatement en évidence que $\frac{D_x^n P}{A}$ est la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de la quantité

$$(x-a)^\alpha(x-b)^\beta,$$

le numérateur étant du degré $n+k$, et le dénominateur du degré n.

On parvient à la même réduite, si l'on part de l'égalité suivante:

$$(x-a)^{n+k-\alpha}(x-b)^{n+k-\beta} = Q + \frac{\zeta}{x} + \frac{\zeta'}{x^2} + \dots$$

où la partie entière Q est du degré $2n+k$.

En prenant en effet la dérivée d'ordre $n+k$ des deux membres, nous trouvons:

$$(x-a)^{-\alpha}(x-b)^{-\beta}B = D_x^{n+k}Q + \frac{\theta}{x^{n+k+1}} + \frac{\theta'}{x^{n+k+2}} + \dots$$

et comme tout à l'heure on en conclut que $\frac{D_x^{n+k}Q}{B}$ est une réduite du développement de $(x-a)^{-\alpha}(x-b)^{-\beta}$.

La fraction inverse $\frac{B}{D_x^{n+k}Q}$ est par conséquent, d'après le degré de son dénominateur la réduite d'ordre n de la quantité $(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}$, et vous voyez que vous pouvez écrire, sauf un facteur constant:

$$B = D_x^n P, \qquad D_x^{n+k} Q = A.$$

Ces relations mettent en évidence une liaison bien singulière et que jusqu'ici je n'ai point cherché à approfondir entre P, Q, A et B; je me contenterai d'avoir établi par la première le résultat que j'avais en vue.

Paris, 1 Février 1884.

SUR L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TROISIEME ORDRE DES SYSTEMES ORTHOGONAUX

PAR

GASTON DARBOUX

À PARIS.

On sait que si

$$\rho = \varphi(x, y, z)$$

est l'équation d'une famille de surfaces, la condition nécessaire et suffisante pour que cette famille fasse partie d'un système triple orthogonal s'exprime par une équation aux dérivées partielles du troisième ordre à laquelle doit satisfaire le paramètre ρ considéré comme fonction de x, y, z. Je me propose de montrer que la théorie de LAMÉ conduit à un moyen rapide de former cette équation et même de l'écrire avec un système de variables quelconques.

Soient ρ, ρ_1, ρ_2 les paramètres de trois familles de surfaces orthogonales; les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de l'espace considérées comme fonctions de ρ, ρ_1, ρ_2 donneront naissance à l'équation

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Il résulte immédiatement de la théorie de LAMÉ que si l'on considère l'équation linéaire

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial\rho_1 \partial\rho_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\rho_2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\rho_1}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2}$$

elle admettra les solutions particulières

$$\theta = H, \qquad \theta = x, \qquad \theta = y, \qquad \theta = z, \qquad \theta = x^2 + y^2 + z^2.$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante.

Il existe une équation linéaire du second ordre à laquelle satisfont les solutions particulières

$$1, \; H, \; x, \; y, \; z, \; x^2 + y^2 + z^2$$

et qui jouit de plus de la propriété que, si elle admet une solution u, *elle admet aussi la solution* $u\varphi(\rho)$, $\varphi(\rho)$ *désignant une fonction quelconque de* ρ. *Elle admettra donc également les solutions*

$$\rho, \; \rho x, \; \rho y, \; \rho z.$$

Cette remarque permet de former immédiatement l'équation quand on choisit x, y, z comme variables indépendantes au lieu de ρ, ρ_1, ρ_2.

En effet l'équation en θ prendra évidemment la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + A'\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + A''\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} + 2B\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} + 2B'\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} + 2B''\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}$$

$$+ 2C\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2C'\frac{\partial\theta}{\partial y} + 2C''\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0.$$

En exprimant qu'elle admet les 8 solutions

$$x, \; y, \; z, \; \rho, \; \rho x, \; \rho y, \; \rho z, \; x^2 + y^2 + z^2$$

on obtient les équations de condition

$$C = C' = C'' = 0$$

$$A\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + A'\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} + A''\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} + 2B\frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial z} + 2B'\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial z} + 2B''\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} = 0$$

$$A\frac{\partial\rho}{\partial x} + B'\frac{\partial\rho}{\partial z} + B''\frac{\partial\rho}{\partial y} = 0$$

$$A'\frac{\partial\rho}{\partial y} + B\frac{\partial\rho}{\partial z} + B''\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$$

$$A''\frac{\partial\rho}{\partial z} + B\frac{\partial\rho}{\partial y} + B'\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0$$

$$A + A' + A'' = 0$$

qui déterminent les rapports mutuels des coefficients. L'équation en θ est donc, sous la forme d'un déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} & \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\rho}{\partial z^2} & \frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial\rho}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial\rho}{\partial z} & \frac{\partial\rho}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial\rho}{\partial y} & 0 & \frac{\partial\rho}{\partial z} & 0 & \frac{\partial\rho}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial\rho}{\partial z} & \frac{\partial\rho}{\partial y} & \frac{\partial\rho}{\partial x} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de remplacer θ par la 9e solution

$$\theta = H = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}}$$

pour retrouver l'équation du troisième ordre à laquelle satisfait ρ.

Prenons maintenant comme variables indépendantes x, y, ρ. L'équation en θ sera de la forme

$$a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + a'\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + a''\frac{\partial^2\theta}{\partial \rho^2} + 2b\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial\rho} + 2b'\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial\rho} + 2b''\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}$$
$$+ 2c\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2c'\frac{\partial\theta}{\partial y} + 2c''\frac{\partial\theta}{\partial\rho} = 0.$$

En écrivant qu'elle admet les solutions particulières

$$x,\ y,\ \rho,\ x\rho,\ y\rho,\ \varphi(\rho)$$

on voit qu'elle se réduit à la forme très simple

$$a\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + a'\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2b''\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} = 0.$$

Les rapports mutuels de a, a', b'' se déterminent par la condition que l'équation précédente admette les deux solutions nouvelles

$$z, \quad x^2 + y^2 + z^2$$

et si l'on désigne, suivant l'usage, par p, q, r, s, t les dérivées de z considerée comme fonction de x et de y on trouve

$$[s(1+q^2) - tpq]\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}[t(1+p^2) - r(1+q^2)] + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}[rpq - s(1+p^2)] = 0$$

pour la forme définitive de l'équation en θ.

La neuvième solution particulière $\theta = H$ de cette équation a, dans ce cas, pour expression

$$H = \frac{\frac{\partial z}{\partial \rho}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

En écrivant qu'elle vérifie l'équation précédente, on retrouvera l'équation du troisième ordre des systèmes orthogonaux, sous la forme élégante que nous devons à M. Maurice Lévy.

SUR QUELQUES POINTS
DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES

PAR

E. LAGUERRE
à PARIS.

I.

1. Dans tout ce qui suit, à moins que je n'en avertisse expressément, je désigne par ξ un nombre positif ou nul et par η un nombre positif quelconque supérieur à ξ.

Cela posé, en considérant le polynôme entier du degré n

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

j'y rattacherai le polynôme du même degré $\phi(x)$ défini par l'égalité suivante

$$\phi(x) = \frac{x^{n+1}f(\eta) - f(x\eta)}{x - 1} + \xi . \frac{f(x\eta) - f(\xi)}{x\eta - \xi}. \tag{1}$$

En posant, pour abréger,

$$\phi(x) = P_0x^n + P_1x^{n-1} + P_2x^{n-2} + \ldots + P_{n-1}x + P_n,$$

il est aisé de déterminer les coefficients P_i.

Si, par exemple, on fait

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

un calcul facile donne

$$\begin{aligned} P_0 &= a_0\eta^3 + a_1\eta^2 + a_2\eta + a_3, \\ P_1 &= a_0\xi\eta^2 + a_1\eta^2 + a_2\eta + a_3, \\ P_2 &= a_0\xi^2\eta + a_1\xi\eta + a_2\eta + a_3, \\ P_3 &= a_0\xi^3 + a_1\xi^2 + a_2\xi + a_3. \end{aligned}$$

La loi de formation de ces coefficients est évidente et s'étend aisément au cas d'un polynôme d'un degré quelconque; les coefficients extrêmes sont $f(\eta)$ et $f(\xi)$.

2. Le calcul des nombres P_i s'effectue de la façon la plus simple par la méthode suivante: que l'on forme d'abord, et par voie récurrente, une suite de nombres Q_i déterminés par les relations

$$Q_0 = a_0, \quad Q_1 = \xi Q_0 + a_1, \quad Q_2 = \xi Q_1 + a_2, \quad \ldots, \quad Q_n = \xi Q_{n-1} + a_n,$$

les nombres P_i seront donnés par les égalités

$$P_n = Q_n, \quad P_{n-1} = P_n + (\eta - \xi)Q_{n-1}, \quad P_{n-2} = P_{n-1} + \eta(\eta - \xi)Q_{n-2}, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad P_0 = P_1 + \eta^{n-1}(\eta - \xi)Q_0.$$

3. La propriété fondamentale du polynôme $\phi(x)$ peut s'énoncer ainsi:

Le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre les quantités ξ et η, est au plus égal au nombre des variations du polynôme $\phi(x)$, et, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Pour la démontrer, je remarque que, de l'égalité (1), on déduit

$$\frac{(\xi - \eta)xf(x\eta)}{(x - 1)(x\eta - \xi)} = \frac{x^{n+1}f(\eta)}{1 - x} + \phi(x) + \frac{\xi f(\xi)}{x\eta - \xi}.$$

Pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et l'unité, $\frac{1}{1 - x}$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances

croissantes de x, et $\frac{1}{x\eta - \xi}$ développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances décroissantes de x.

Effectuant ces développements, on a l'égalité

$$\frac{(\xi-\eta)xf(x\eta)}{(x-1)(x\eta-\xi)} = \ldots + f(\eta).x^{n+2} + f(\eta).x^{n+1} + \phi(x)$$

$$+ \frac{\xi f(\xi)}{\eta}\cdot\frac{1}{x} + \frac{\xi^2 f(\xi)}{\eta^2}\cdot\frac{1}{x^2} + \ldots;$$

la série double, qui compose le second membre, est convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et l'unité, et le nombre de ces valeurs, pour lesquelles elle s'annule, est évidemment égal au nombre m des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre ξ et η. D'où il suit que ce nombre m est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la série; ce nombre des variations se réduit d'ailleurs au nombre des variations du polynôme $\phi(x)$. Il suffit pour le faire voir de remarquer que, le premier terme de $\phi(x)$ étant $f(\eta).x^n$, son coefficient est le même que celui de tous les termes précédents et que, le dernier terme étant $f(\xi)$, il est de même signe que tous les termes qui suivent. De là résulte immédiatement la proposition que je voulais démontrer.

4. Soit, comme application, l'équation

$$x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0. \tag{2}$$

En posant $\xi = 0$ et $\eta = 1$, on formera le tableau suivant

valeurs des coefficients......	$+1$	-2	$+1$	-3	$+4$	-2
valeurs des Q_i	$+1$	-2	$+1$	-3	$+4$	-2
valeurs des P_i	-1	-2	0	-1	$+2$	-2,

d'où l'on conclut, puisque la suite des P_i présente deux variations, que l'équation (2) a au plus deux racines comprises entre zéro et $+1$.

Faisant maintenant $\xi = 1$ et $\eta = 2$, on a ce tableau

$+1$	-2	$+1$	-3	$+4$	-2
$+1$	-1	0	-3	$+1$	-1
$+2$	-14	-6	-6	0	-1;

la suite des P_i présentant une seule variation, on voit que l'équation a une seule racine comprise entre $+1$ et $+2$.

En faisant $\xi = 2$ et $\eta = 3$, on a les suites

$+1$	-2	$+1$	-3	$+4$	-2
$+1$	0	$+1$	-1	$+2$	$+2$
$+91$	$+10$	$+10$	$+1$	$+4$	$+2$;

la dernière ne renfermant aucune variation, on en conclut que l'équation n'a pas de racine comprise entre $+2$ et $+3$.

Pour $\xi = 3$ et $\eta = 4$, on a le tableau suivant

coefficients	$+1$	-2	$+1$	-3	$+4$	-2
Q_i	$+1$	$+1$	$+4$	$+9$	$+31$	$+91$;

il est inutile ici de calculer les valeurs des P_i, j'ai en effet démontré [1] que le nombre des racines supérieures à ξ est au plus égal au nombre des variations que présente la suite des nombres Q_i; et cette suite, pour $\xi = 3$, ne présentant aucune variation, il est clair que l'équation proposée n'a aucune racine supérieure à 3.

5. L'équation (2) a donc une racine comprise entre $+1$ et $+2$; elle n'a aucune racine supérieure à $+2$, ni aucune racine négative, puisque son premier membre ne présente que des variations.

L'intervalle compris entre zéro et $+1$ peut contenir deux racines, ou n'en contenir aucune. Pour résoudre la question, je remarque que le

---

[1] *Mémoire sur la théorie des équations numériques*, Journal de math. pures et appliquées, 3me Série, T. 9, p. 105.

nombre des racines de l'équation proposée, qui sont comprises entre zéro et $+1$, est égal au nombre des racines de l'équation

$$2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$$

qui sont supérieures à l'unité.

Formons, en suivant la méthode que j'ai indiquée dans le mémoire cité précédemment (*Théorie des équations numériques*, p. 116), le tableau suivant

$+2$	-4	$+3$	-1	$+2$	-1
$+2$	-2	$+1$	0	$+2$	$+1$
$+2$	0	$+1$	0	$+2$;	

les nombres

$$+2,\quad 0,\quad +1,\quad 0,\quad +2,\quad +1,$$

qui forment le contour extérieur du tableau n'offrant aucune variation, il en résulte que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre zéro et l'unité; elle a ainsi une seule racine comprise entre $+1$ et $+2$.

II.

6. Quand on veut effectuer la séparation des racines d'une équation ou obtenir leur valeur approximative, il est souvent utile de déterminer des limites entre lesquelles demeure comprise la valeur que prend un polynôme donné, lorsque la variable prend toutes les valeurs possibles dans un certain intervalle.

En supposant, comme ci-dessus, ξ et η positifs et η plus grand que ξ, Cauchy a donné de cette question la solution très simple suivante:

Décomposons le polynôme donné $f(x)$ en deux parties, en mettant en évidence les termes positifs et les termes négatifs, en sorte que l'on ait

$$f(x) = f_0(x) - f_1(x);$$

cela posé, si x varie entre ξ et η, la valeur que prend le polynôme $f(x)$ demeure toujours comprise entre les nombres

$$f_0(\eta) - f_1(\xi) \quad \text{et} \quad f_0(\xi) - f_1(\eta).$$

L'exactitude de cette règle est évidente; elle est d'une application facile, mais conduit le plus souvent à des limites beaucoup trop éloignées des limites véritables.

On obtiendra une solution plus précise en employant la méthode qui suit.

Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n$ les coefficients du polynôme $\varphi(x)$; en désignant respectivement par R et par S le plus grand et le plus petit de ces nombres, considérons l'équation

$$R - f(x) = 0. \tag{1}$$

Les quantités, analogues à $P_0, P_1, \ldots, P_n$, sont dans ce cas

$$R - P_0, \quad R - P_1, \quad \ldots, \quad R - P_n,$$

et il est clair qu'elles sont toutes positives ou nulles. L'équation (1) n'a donc aucune racine comprise entre ξ et η et son premier membre conserve toujours le même signe quand x varie depuis ξ jusqu'à η, à savoir le signe $+$; pour toute valeur de x, comprise entre ξ et η, on a donc

$$f(x) \overline{\overline{<}} R.$$

On prouverait d'une façon analogue que, pour les mêmes valeurs, on a

$$f(x) \overline{\overline{>}} S;$$

d'où cette conclusion importante :

Lorsque x prend toutes les valeurs possibles comprises entre les nombres ξ et η, la valeur du polynôme $f(x)$ demeure constamment comprise entre les nombres R et S.

7. Soit, comme application, le polynôme

$$f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

que j'ai déjà considéré plus haut.

On voit que, quand x varie de zéro à $+1$, le polynôme prend des valeurs comprises entre les nombres -2 et $+2$; la règle de CAUCHY donne les limites -7 et $+6$. Quand x varie de $+1$ à $+2$, la règle énoncée ci-dessus donne les limites -14 et $+2$, la règle de CAUCHY les limites -40 et $+41$; enfin, dans l'intervalle compris entre $+2$ et $+3$, la règle de CAUCHY donne les limites -143 et $+236$, l'autre règle les limites bien plus resserrées $+1$ et $+91$.

8. Il est moins aisé de déterminer des limites un peu précises, entre lesquelles demeurent comprises les valeurs que prend une fonction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, lorsque x varie dans l'intervalle $(\xi \ldots \eta)$.

Voici cependant une solution assez simple, mais limitée au cas où relativement à l'un des termes de la fraction, au polynôme $f(x)$ par exemple, les nombres P_i ont tous le même signe.

Soient

$$P_0, \; P_1, \; \ldots, \; P_n$$

ces divers nombres, et

$$\Pi_0, \; \Pi_1, \; \ldots, \; \Pi_n$$

les nombres correspondants relativement au polynôme $\varphi(x)$; je suppose les deux polynômes du même degré, ce que l'on peut toujours admettre en introduisant au besoin un certain nombre de coefficients nuls.

Cela posé, en s'appuyant sur les considérations développées plus haut, on démontrera aisément que, lorsque x varie dans l'intervalle $(\xi \ldots \eta)$, la valeur que prend la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ demeure constamment comprise entre le plus grand et le plus petit des nombres

$$\frac{\Pi_0}{P_0}, \; \frac{\Pi_1}{P_1}, \; \ldots, \; \frac{\Pi_n}{P_n}.$$

Considérons, par exemple, et en supposant $\xi = 2$ et $\eta = 3$, la fraction

$$\frac{2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x - 5}{x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 2};$$

on a

$$P_0 = 91, \quad P_1 = P_2 = 10, \quad P_3 = 1, \quad P_4 = 4 \quad \text{et} \quad P_5 = 2.$$

Le tableau suivant donnera les valeurs des H_i

coefficients ...	0	+ 2	− 5	+ 2	− 3	− 5
Q_i	0	+ 2	− 1	0	− 3	− 11
H_i	+ 31	+ 31	− 23	− 14	− 14	− 11.

Si maintenant nous formons les fractions

$$\frac{31}{91}, \quad \frac{31}{10}, \quad -\frac{23}{10}, \quad -14, \quad -\frac{14}{4}, \quad -\frac{11}{2},$$

nous voyons que la plus petite d'entre elles est -14 et la plus grande $\frac{31}{10}$; on en conclut que, quand x varie depuis $+2$ jusqu'à $+3$, la valeur de la fraction demeure comprise entre les limites -14 et $+3,1$.

III.

9. Soit p un nombre entier positif quelconque, mais supérieur à $(n+1)$; dans le développement en série de l'expression

$$\frac{x^{n+1}f(\eta)}{1-x} + \psi(x) + \frac{\xi f(\xi)}{x\eta - \xi},$$

considérons seulement les termes dont les exposants sont compris entre les limites p et $-p$, nous obtiendrons ainsi un polynôme $\theta_p(x)$ dont la valeur est donnée par l'égalité

$$\theta_p = P_0 x^p + \ldots + P_0 x^{n+1}$$
$$+ P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \ldots + P_{n-2} x^2 + P_{n-1} x + P_n$$
$$+ \frac{\xi}{\eta} P_n \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{\xi^p}{\eta^p} P_n \cdot \frac{1}{x^p}.$$

Lorsque le nombre p croît indéfiniment, θ_p a pour limite une série indéfinie θ qui, pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et 1, a la même valeur que la fraction

$$\frac{(\xi - \eta)xf(x\eta)}{(x - 1)(x\eta - \xi)},$$

d'où résulte, en désignant par m le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$ qui sont comprises entre ξ et η, que la série θ est convergente et s'annule pour m valeurs de la variable.

Cherchons d'abord une limite supérieure du nombre des racines positives de l'équation $\theta_p = 0$; une pareille limite est donnée immédiatement par le nombre des variations de θ_p, qui se réduit à celui des variations de $\phi(x)$. Mais on peut obtenir une limite plus précise en faisant usage d'une proposition importante due à Newton.

Au dessous de la suite des termes de $\theta_p(x)$ où se peuvent trouver des variations, à savoir les termes

$$P_0, \ P_1, \ P_2, \ \ldots, \ P_{n-2}, \ P_{n-1}, \ P_n$$

écrivons les termes de la suite

$$P_0^2 - P_0 P_1, \ P_1^2 - P_0 P_2, \ P_2^2 - P_0 P_1, \ \ldots$$
$$\ldots, \ P_{n-2}^2 - P_{n-3} P_{n-1}, \ P_{n-1}^2 - P_n P_{n-2}, \ P_n^2 - P_n P_{n-1} \frac{\xi}{\eta};$$

nous obtiendrons le tableau suivant

$$(\mathrm{A}) \quad \begin{array}{ccccccc} P_0, & P_1, & P_2, & \ldots, & P_{n-2}, & P_{n-1}, & P_n, \\ +1, & P_1^2 - P_0 P_2, & P_2^2 - P_0 P_1, & \ldots, & P_{n-2}^2 - P_{n-3} P_{n-1}, & P_{n-1}^2 - P_{n-2} P_n, & +1, \end{array}$$

où j'ai remplacé les termes extrêmes de la seconde ligne par $+1$, attendu que, quand P_0 et P_1 sont de signe contraire, $P_0 - P_0 P_1$ est positif et que, de même, $P_n^2 - \frac{\xi}{\eta} P_n P_{n-1}$ est positif quand les termes P_n et P_{n-1} présentent une variation.

Cela posé, il suit du théorème de Newton que le nombre q des racines positives de l'équation $\theta_p = 0$, est au plus égal au nombre V_0 des variations de la suite supérieure du tableau (A), qui correspondent à des permanences dans la suite inférieure.

Ce nombre q est, on le voit, indépendant de la valeur attribuée au nombre entier p et sa valeur demeure la même quand p croît indéfiniment; on en conclut que le nombre m, qui représente le nombre des valeurs positives de x pour lesquelles la série θ converge vers zéro, est au plus égal à p.

D'où la proposition suivante:

Si l'on forme le tableau (A), *le nombre des racines de l'équation* $f(x) = 0$, *qui sont comprises entre* ξ *et* η, *est au plus égal au nombre des variations présentées par la ligne supérieure du tableau et auxquelles correspondent des permanences dans la ligne inférieure.*

Soit, comme application, l'équation

$$x^5 - 3x^3 + 9x^2 - 11x + 5 = 0; \tag{1}$$

cherchons le nombre des racines comprises entre $\xi = 1$ et $\eta = 2$.

Les valeurs des nombres P_i s'obtiennent en formant le tableau suivant

$+1$	0	-3	$+9$	-11	$+5$
$+1$	$+1$	-2	$+7$	-4	$+1$
$+27$	$+11$	$+3$	$+11$	-3	$+1$,

et le tableau (A) devient

$+27$	$+11$	$+3$	$+11$	-3	$+1$
...	...	...	$+20$	-2	$+1$.

Dans la ligne inférieure, je n'ai indiqué les signes des termes que quand ils correspondent à des variations; on voit qu'il n'y a dans la ligne

supérieure aucune variation à laquelle corresponde une permanence dans la ligne inférieure, d'où il suit que l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre $+1$ et $+2$.

On arriverait à la même conclusion en employant la méthode suivante qui trouve fréquemment d'utiles applications.

L'équation peut se mettre sous la forme

$$(x^4 + x^3 - 2x^2 + 7x - 4)(x - 1) + 1 = 0,$$

et, par suite, peut s'écrire

$$x = 1 - \frac{1}{x^4 + x^3 - 2x^2 + 7x - 4}. \tag{2}$$

Cherchons des limites entre lesquelles varie le polynôme dénominateur lorsque x varie de $+1$ à $+2$; en appliquant la méthode indiquée plus haut, on formera le tableau

$+1$	$+1$	-2	$+7$	-4
$+1$	$+2$	0	$+7$	$+3$.

Il suffit ici de calculer les valeurs des nombres Q_i; ceux-ci étant en effet positifs, il est clair que les P_i seront également tous positifs et, par suite, le dénominateur demeure positif quand x varie dans les limites indiquées.

Il en résulte que le second membre de l'égalité (2) est toujours inférieur à l'unité; il ne peut donc jamais être compris entre $+1$ et $+2$ et l'on voit, comme nous l'avions reconnu précédemment, que l'équation (1) n'a aucune racine dans cet intervalle.

IV.

10. La proposition, énoncée dans le premier paragraphe, peut encore être démontrée par une autre méthode qui donne lieu à quelques conséquences intéressantes.

En désignant par ξ et η deux nombres quelconques *positifs ou négatifs*, soient $f(x)$ un polynôme entier du degré n et $\psi(x)$ le polynôme déterminé par la relation

$$\psi(x) = \frac{x^{n+1}f(\eta) - f(x\eta)}{x - 1} + \xi . \frac{f(x\eta) - f(\xi)}{x\eta - \xi}.$$

Appelons $\psi_1(x)$ ce que devient $\psi(x)$, quand on remplace $f(x)$ par $(x - \lambda)$; on a évidemment

$$\psi_1(x) = \frac{x^{n+2}f(\eta)(\eta - \lambda) - f(x\eta)(x\eta - \lambda)}{x - 1} + \xi . \frac{f(x\eta)(x\eta - \lambda) - f(\xi)(\xi - \lambda)}{x\eta - \xi},$$

d'où, par un calcul facile,

$$\psi_1(x) = \psi(x)(x\eta - \lambda) - \lambda f(\eta)x^{n+1} + \xi f(\xi).$$

On voit que $\psi_1(x)$ et le produit $\psi(x)(x\eta - \lambda)$ ne diffèrent que par leurs termes extrêmes; les coefficients de x^{n+1} étant respectivement [puisque $f(\eta) = P_0$ et $f(\xi) = P_n$] $P_0(\eta - \lambda)$ et $P_0\eta$, les termes constants étant respectivement $(\xi - \lambda)P_n$ et $-\lambda P_n$.

Si donc le nombre λ satisfait aux conditions suivantes

$$\eta(\eta - \lambda) > 0, \quad \lambda(\lambda - \xi) > 0,$$

le polynôme $\psi_1(x)$ présente précisément autant de variations que le produit $\psi(x)(x\eta - \lambda)$. D'où il suit, en vertu du lemme de Segner, que, si $\eta\lambda$ est positif, $\psi_1(x)$ a au moins une variation de plus que $\psi(x)$, et que, si $\eta\lambda$ est négatif, $\psi_1(-x)$ a au moins une variation de plus que $\psi(-x)$.

On peut donc énoncer les propositions suivantes:

L'équation $\psi(x) = 0$ a au moins autant de variations que l'équation $f(x) = 0$ a de racines réelles λ satisfaisant aux inégalités

$$(1) \qquad \lambda\eta > 0, \quad \eta(\eta - \lambda) > 0, \quad \lambda(\lambda - \xi) > 0.$$

La transformée $\psi(-x)$ a au moins autant de variations que l'équation $f(x) = 0$ a de racines réelles λ satisfaisant aux inégalités

$$(2) \qquad \lambda\eta < 0, \quad \eta(\eta - \lambda) > 0, \quad \lambda(\lambda - \xi) > 0.$$

11. Supposons par exemple ξ et η positifs et $\eta > \xi$, les inégalités (1) sont satisfaites pour toutes les racines comprises entre ξ et η. D'où la proposition que j'ai démontrée au commencement de ce mémoire.

Supposons maintenant que ξ et η soient des nombres positifs quelconques, les inégalités (2) sont vérifiées pour toutes les racines négatives; d'où cette conclusion :

Quels que soient les nombres positifs ξ et η, le nombre des racines négatives de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal au nombre des variations du polynôme $\varphi(-x)$.

Dans le cas particulier où, ξ et η étant positifs, η est plus grande que ξ, on voit que, si toutes les racines de l'équation sont réelles et si toutes les racines positives sont comprises entre ξ et η, le nombre des variations de $\varphi(x)$ est précisément égal au nombre des racines positives et le nombre des variations de $\varphi(-x)$ égal au nombre des racines négatives.

12. Dans ce dernier cas, j'ajouterai encore une observation.

Ayant, pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{\xi}{\eta}$ et $+1$, l'égalité

$$\frac{(\xi-\eta)xf(x\eta)}{(x-1)(x\eta-\xi)} = \ldots + f(\eta)\,.\,x^{n+2} + f(\eta)\,.\,x^{n+1} + \varphi(x)$$

$$+ \frac{\xi}{\eta} f(\xi)\cdot\frac{1}{x} + \frac{\xi^2}{\eta^2} f(\xi)\cdot\frac{1}{x^2} + \ldots,$$

je remarque que, si $f(\xi)$ et $f(\eta)$ sont de même signe et si l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a aucune racine comprise entre 0 et $+1$, $\varphi(x)$ conserve dans cet intervalle un signe constant à savoir celui de $f(\xi)$, puisque $\varphi(x)$ se réduit à cette quantité pour $\xi = 0$.

Le second membre de l'égalité précédente conserve donc toujours le même signe [à savoir celui de $f(\xi)$ et de $f(\eta)$], quand x varie de $\frac{\xi}{\eta}$ à $+1$; il en est de même du premier membre qui, par suite, ne peut s'annuler quand x varie depuis ξ jusqu'à η.

D'où la proposition suivante que l'on peut souvent appliquer avec utilité, pour reconnaître si un intervalle donné renferme des racines:

Les nombres $f(\xi)$ et $f(\eta)$ étant de même signe, l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune racine comprise entre ξ et η, si l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a aucune racine comprise entre 0 et $+1$.

J'ai d'ailleurs donné [1] un algorithme très simple qui permet, dans beaucoup de cas, de reconnaître facilement si une équation a des racines supérieures à l'unité, à quoi se ramène immédiatement le problème de déterminer si l'équation $\varphi(x) = 0$ a des racines comprises entre 0 et $+1$.

Soit, comme application, l'équation

$$x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 8x + 10 = 0$$

qui n'a, évidemment, qu'une seule racine négative.

Le nombre des alternances de la suite

$$10 - 8 + 3 - 2 + 1$$

étant nul, le nombre des racines positives de l'équation, qui sont inférieures à $+1$, est égal à zéro; de même le nombre des alternances de la suite

$$2^5 - 2.2^3 + 3.2^2 - 8.2 + 10$$

étant également nul, on voit qu'il n'y a pas de racine supérieure à $+2$.

Pour reconnaître s'il y a des racines comprises entre $+1$ et $+2$, j'emploierai la méthode exposée plus haut; on formera le tableau

$+1$	0	-2	$+3$	-8	$+10$
$+1$	$+1$	-1	$+2$	-6	$+4$
$+22$	$+6$	-2	$+2$	-2	$+4$;

d'où l'on déduit

$$\varphi(x) = 22x^5 + 6x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 4.$$

Or, le nombre des alternances de la suite

$$+4 - 2 + 2 - 2 + 6 + 22$$

---

(1) *Mémoire sur la théorie des équations numériques*, p. 116.

étant nul, l'équation $\phi(x) = 0$ n'a aucune racine positive inférieure à l'unité et, par suite, l'équation proposée n'a aucune racine comprise entre $+1$ et $+2$. Elle a donc une racine négative et quatre racines imaginaires.

V.

13. La propriété fondamentale des coefficients du polynôme $\phi(x)$ peut s'énoncer ainsi:

Le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre les nombres ξ et η, est au plus égal au nombre des variations que présente la suite

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n.$$

Il est nécessaire d'examiner les simplifications qui se présentent, lorsque le polynôme $f(x)$ présente des lacunes.

Soit, pour fixer les idées, l'équation

$$A + Bx^3 + Cx^7 + Dx^{10} = 0;$$

formons la suite

$$\begin{aligned}
P_0 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\eta^{10},\\
P_1 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\xi\eta^9,\\
P_2 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\xi^2\eta^8,\\
P_3 &= A + B\eta^3 + C\eta^7 + D\xi^3\eta^7,\\
P_4 &= A + B\eta^3 + C\xi\eta^6 + D\xi^4\eta^6,\\
P_5 &= A + B\eta^3 + C\xi^2\eta^5 + D\xi^5\eta^5,\\
P_6 &= A + B\eta^3 + C\xi^3\eta^4 + D\xi^6\eta^4,\\
P_7 &= A + B\eta^3 + C\xi^4\eta^3 + D\xi^7\eta^3,\\
P_8 &= A + B\xi\eta^2 + C\xi^5\eta^2 + D\xi^8\eta^2,\\
P_9 &= A + B\xi^2\eta + C\xi^6\eta + D\xi^9\eta,\\
P_{10} &= A + B\xi^3 + C\xi^7 + D\xi^{10}.
\end{aligned}$$

A l'égard du nombre de variations que présente la suite de ces nombres, on peut remarquer que les termes P_0, P_1, P_2 et P_3 peuvent s'écrire de la façon suivante

$$\Omega + D\eta^{10}, \quad \Omega + D\xi\eta^{9}, \quad \Omega + D\xi^2\eta^{8}, \quad \Omega + D\xi^3\eta^{7}.$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$\Omega = A + B\eta^3 + C\eta^7.$$

Il est clair que ces quantités vont toutes en croissant ou toutes en décroissant, le nombre des variations qu'elles présentent se réduit donc au nombre des variations des deux termes P_0 et P_3 et l'on peut supprimer les termes P_1 et P_2; on démontrerait de même qu'on peut ne tenir aucun compte des termes P_4, P_5, P_6, P_8 et P_9.

Il suffit ainsi de considérer la suite

$$\begin{aligned}
&A + B\eta^3 + C\eta^7 \quad + D\eta^{10},\\
&A + B\eta^3 + C\eta^7 \quad + D\xi^3\eta^7,\\
&A + B\eta^3 + C\xi^4\eta^3 + D\xi^7\eta^3.\\
&A + B\xi^3 + C\xi^7 \quad + D\xi^{10}.
\end{aligned}$$

D'une façon un peu plus générale, soit l'équation

$$(1) \qquad f(x) = A + Bx^\beta + Cx^\gamma + Dx^\delta + Ex^\varepsilon = 0,$$

où β, γ, δ, ε désignent des nombres entiers positifs croissants; on établira comme ci-dessus la proposition suivante:

En désignant par ξ et η deux nombres positifs, dont le plus grand soit η, le nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, qui sont comprises entre ξ et η, est au plus égal au nombre des variations que présente la suite des nombres

$$(\mathrm{T}) \qquad \left|\begin{aligned}
&A + B\eta^\beta + C\eta^\gamma \qquad + D\eta^\delta \qquad + E\eta^\varepsilon,\\
&A + B\eta^\beta + C\eta^\gamma \qquad + D\eta^\delta \qquad + E\xi^{\varepsilon-\delta}\eta^\delta.\\
&A + B\eta^\beta + C\eta^\gamma \qquad + D\xi^{\delta-\gamma}\eta^\gamma + E\xi^{\varepsilon-\gamma}\eta^\gamma.\\
&A + B\eta^\beta + C\xi^{\gamma-\beta}\eta^\beta + D\xi^{\delta-\beta}\eta^\beta + E\xi^{\varepsilon-\beta}\eta^\beta,\\
&A + B\xi^\beta + C\xi^\gamma \qquad + D\xi^\delta \qquad + E\xi^\varepsilon.
\end{aligned}\right.$$

La loi de formation de ces quantités est évidente et il est clair que le théorème s'étend au cas où le polynôme contient un nombre quelconque de termes.

J'ajoute qu'il subsiste encore *lorsque les exposants β, γ, δ, ε sont des nombres positifs quelconques, commensurables ou incommensurables, rangés par ordre croissant de grandeur.*

Pour le démontrer, supposons que β, γ, δ, ε soient des nombres fractionnaires quelconques et que, β', γ', δ', ε', β'', γ'', δ'' et ε'' désignant des nombres entiers, on ait

$$\beta = \frac{\beta''}{\beta'}, \quad \gamma = \frac{\gamma''}{\gamma'}, \quad \delta = \frac{\delta''}{\delta'}, \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}.$$

En posant, pour abréger $\beta'\gamma'\delta'\varepsilon' = \omega$ et en faisant $x = X^{\omega}$, l'équation (1) a pour transformée l'équation

$$(2) \qquad A + X^{\frac{\omega\beta''}{\beta'}} + X^{\frac{\omega\gamma''}{\gamma'}} + X^{\frac{\omega\delta''}{\delta'}} + X^{\frac{\omega\varepsilon''}{\varepsilon'}} = 0,$$

dans laquelle tous les exposants sont des nombres entiers.

Le nombre des racines de l'équation (1), qui sont comprises entre ξ et η, est égal au nombre des racines de l'équation (2) qui sont comprises entre $\xi^{\frac{1}{\omega}}$ et $\eta^{\frac{1}{\omega}}$. Or, en appliquant à l'équation (2) la proposition énoncée dans le n° précédent, on trouve précisément la suite (A); d'où il résulte que cette proposition subsiste lorsque β, γ, δ, ε sont des nombres fractionnaires positifs quelconques et, par conséquent, même lorsqu'ils sont incommensurables.

14. Les équations importantes de la forme

$$Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \ldots + Le^{\lambda x} = 0$$

se ramènent à une équation de la forme considérée précédemment en posant $e^{x} = z$; d'où la proposition suivante, qui s'étend évidemment au cas où le premier membre contient un nombre quelconque de termes, mais que, pour plus de clarté, j'énoncerai seulement dans un cas particulier.

En désignant par ξ et η deux nombres positifs ou négatifs dont le plus grand soit η, par α, β, γ, δ et ε des nombres quelconques, positifs ou néga-

tifs, que je supposerai rangés par ordre croissant de grandeur, le nombre des racines de l'équation

$$F(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + Ce^{\gamma x} + De^{\delta x} + Ee^{\varepsilon x} = 0,$$

qui sont comprises entre ξ et η, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes de la suite

$$\begin{aligned}
&Ae^{\alpha\eta} + Be^{\beta\eta} + Ce^{\gamma\eta} + De^{\delta\eta} + Ee^{\varepsilon\eta},\\
&Ae^{\alpha\eta} + Be^{\beta\eta} + Ce^{\gamma\eta} + De^{\delta\eta} + Ee^{(\varepsilon-\delta)\xi+\delta\eta},\\
&Ae^{\alpha\eta} + Be^{\beta\eta} + Ce^{\gamma\eta} + De^{(\delta-\gamma)\xi+\gamma\eta} + Ee^{(\varepsilon-\gamma)\xi+\gamma\eta},\\
&Ae^{\alpha\eta} + Be^{\beta\eta} + Ce^{(\gamma-\beta)\xi+\beta\eta} + De^{(\delta-\beta)\xi+\beta\eta} + Ee^{(\varepsilon-\beta)\xi+\beta\eta},\\
&Ae^{\alpha\xi} + Be^{\beta\xi} + Ce^{\gamma\xi} + De^{\delta\xi} + Ee^{\varepsilon\xi};
\end{aligned}$$

il est clair que, si ces deux nombres diffèrent, leur différence est un nombre pair.

Le théorème de Fourier peut aussi s'appliquer, mais, d'une façon moins facile, aux équations de la forme précédente; il exige en effet (Voir le Mémoire de M. Stern *Sur la résolution des équations transcendantes*. Journal de Crelle, T. 22) que l'on calcule les dérivées de $F(x)$ jusqu'à ce qu'on arrive à une dérivée qui ne change pas de signe dans l'intervalle considéré; ce qui peut exiger de longs calculs et amener souvent à tenir compte d'un très grand nombre de termes.

VI.

15. Les propositions, qui suivent, se rattachent à des considérations entièrement différentes de celles qui font l'objet des paragraphes précédents.

Étant donnée l'équation générale du degré n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

il y existe toujours une infinité de systèmes de nombres

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,$$

tels que, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 x + \alpha_2 a_2 x^2 + \ldots + \alpha_n a_n x^n = 0.$$

Il paraît difficile de déterminer, d'une façon précise, les conditions auxquelles doivent satisfaire les nombres α_i, lesquelles d'ailleurs ne dépendent que de la valeur attribuée au nombre entier n.

Je laisserai entièrement de côté ce problème et m'en tiendrai aux considérations suivantes qui peuvent, dans certains cas, trouver d'utiles applications.

16. Soient $f(x)$ un polynôme entier, du degré n, ayant toutes ses racines réelles et α un nombre positif; il est clair que l'équation

$$\alpha f(x) + x f'(x) = 0 \tag{1}$$

a également toutes ses racines réelles.

Pour le voir, il suffit, dans le cas où toutes les racines de $f(x)$ sont inégales, de mettre l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{f'(x)}{f(x)} = 0.$$

et la proposition subsiste évidemment quand $f(x)$ a des racines égales.

En mettant en évidence les coefficients de $f(x)$ et en posant

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

l'équation (1) peut s'écrire

$$a_0 \alpha + a_1(\alpha + 1)x + a_2(\alpha + 2)x^2 + \ldots + a_n(\alpha + n)x^n = 0.$$

Comme elle a encore toutes ses racines réelles on peut encore en déduire une infinité d'équations jouissant de la même propriété; telle sera, en général, l'équation

$$a_0 F(0) + a_1 F(1).x + a_2 F(2).x^2 + \ldots + a_n F(n).x^n = 0,$$

$F(x)$ désignant un polynôme entier de la forme

$$A(x + \alpha)(x + \alpha_1)(x + \alpha_2) \ldots (x + \alpha_p),$$

où les α_i sont des quantités positives arbitraires et en nombre quelconque.

La même chose aura lieu évidemment, quel que soit le nombre k, à l'égard de l'équation

$$a_0 F(0) + a_1 F(1) e^k x + a_2 F(2) e^{2k} x^2 + \ldots + a_n F(n) e^{nk} x^n = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(2) \qquad a_0 \theta(0) + a_1 \theta(1) x + a_2 \theta(2) x^2 + \ldots + a_n \theta(n) x^n = 0,$$

si l'on pose

$$\theta(x) = A e^{kx}(x + \alpha)(x + \alpha_1) \ldots (x + \alpha_n).$$

Comme le nombre des quantités α_i peut croître au delà de toute limite et que le nombre k est arbitraire, on peut supposer que $\theta(x)$ soit une fonction entière du genre zéro ou du genre un.

D'où la proposition suivante:

En désignant par $\theta(x)$ une fonction entière quelconque, ne s'annulant que pour des valeurs réelles et négatives de x et dont les éléments simples sont des polynômes entiers, des exponentielles de la forme e^{kx}, des fonctions entières du genre zéro ou du genre un, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation (2).

17. Comme application, considérons la fonction $G(x)$ de M. Weierstrass qui est l'inverse de l'intégrale eulérienne $\Gamma(x)$.

La fonction $G(x + \omega)$ ne s'annule que pour $x = -\omega$, $x = -(\omega + 1)$, etc.; si donc ω est positive, $G(x + \omega)$ satisfait aux conditions énoncées ci-dessus et l'on voit que, l'équation (1) ayant toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$\frac{a_0}{\Gamma(\omega)} + \frac{a_1}{\Gamma(\omega + 1)} x + \frac{a_2}{\Gamma(\omega + 2)} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{\Gamma(\omega + n)} x^n = 0,$$

que l'on peut écrire

$$a_0 + \frac{a_1}{\omega} x + \frac{a_2}{\omega(\omega + 1)} x^2 + \frac{a_3}{\omega(\omega + 1)(\omega + 2)} x^3 + \ldots$$

$$+ \frac{a_n}{\omega(\omega + 1) \ldots (\omega + n - 1)} x_n = 0.$$

J'ajouterai que le théorème subsiste encore pour les valeurs de ω comprises entre -1 et 0 (par conséquent pour toutes les valeurs de ω supérieures à -1), si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines de même signe.

18. En faisant usage de la proposition précédente,[1] on démontrera aisément le théorème général qui suit:

En désignant par q un nombre positif quelconque égal ou inférieur à l'unité, et par $H(x)$ et $\Theta(x)$ deux fonctions entières quelconques, ne s'annulant que pour des valeurs réelles et négatives de x et dont les éléments simples sont des polynômes entiers, des exponentielles de la forme e^{kx}, des fonctions entières du genre zéro ou du genre un, si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation

$$\Omega(x) = a_0\Theta(0) + a_1 \cdot \frac{\Theta(1)}{H(0)} qx + a_2 \cdot \frac{\Theta(2)}{H(0)H(1)} q^4x^2 + a_3 \cdot \frac{\Theta(3)}{H(0)H(1)H(2)} q^9x^3 + \ldots$$

$$\ldots + a_n \cdot \frac{\Theta(n)}{H(0)H(1)\ldots H(n-1)} q^{n^2}x^n = 0.$$

On voit ainsi qu'on satisfait au problème, posé au commencement de ce paragraphe, en faisant, quels que soient les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (pourvu que l'équation $f(x) = 0$ ait toutes ses racines réelles)

$$\alpha_0 = \Theta(0), \quad \alpha_1 = \frac{\Theta(1)}{H(0)}q, \quad \alpha_2 = \frac{\Theta(2)}{H(0)H(1)}q^4, \quad \ldots;$$

on obtiendrait encore une solution plus générale en considérant l'équation $x^n\Omega\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, qui a le même nombre de racines réelles que l'équation $\Omega(x) = 0$.

19. Pour appliquer ce qui précède à un exemple simple, je considérerai l'équation

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + nx^{n-1} + x^n = 0,$$

dont toutes les racines sont réelles.

Faisant $\Theta(x) = 1$, $q = 1$ et $H(x) = x + 1$, on voit que l'équation

$$\varphi(x) = 1 + n \cdot \frac{x}{1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

$$\ldots + n \cdot \frac{x^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} = 0$$

a toutes ses racines réelles et négatives; proposition bien connue.

---

[1] Voir, à ce sujet, mon *Mémoire sur la théorie des équations numériques*, p. 132.

Il en est de même de l'équation

$$1 + n . \frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1 . 2} . \frac{x^2}{1 . 2 . n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} . \frac{x^3}{1 . 2 . 3 . n^3} + \ldots = 0;$$

or le premier membre, quand n croît indéfiniment, a pour limite la fonction de Bessel

$$\phi(x) = 1 + x + \frac{x^2}{(1 . 2)^2} + \frac{x^3}{(1 . 2 . 3)^2} + \ldots$$

De là résulte, en vertu d'une proposition que j'ai fait connaître dans une note insérée dans les *Comptes Rendus de l'Académie des sciences*, que $\phi(x)$ est une fonction du genre zéro, ou du moins le produit d'une pareille fonction par une exponentielle de la forme e^{ax}, a étant un nombre essentiellement positif.

On a donc

$$\phi(x) = e^{ax} F(x),$$

$F(x)$ étant une fonction du genre zéro et n'ayant que des racines négatives.

Je veux maintenant prouver que le nombre a est nul; à cet effet, je remarque que $\phi(x)$ satisfait à l'équation linéaire du second ordre

$$x\phi''(x) + \phi'(x) - \phi(x) = 0$$

d'où l'on déduit

(3) $$a^2 + \frac{a-1}{x} = -\left(2a + \frac{1}{x}\right)\frac{F'(x)}{F(x)} - \frac{F''(x)}{F(x)}.$$

Quand x prend des valeurs positives de plus en plus grandes, le premier membre a pour limite a^2; cherchons la limite du second membre.

En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ les valeurs absolues des racines de l'équation $F(x) = 0$ (je suppose ces nombres rangés par ordre croissant de grandeur), on a

(4) $$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x + \alpha_1} + \frac{1}{x + \alpha_2} + \frac{1}{x + \alpha_3} + \ldots;$$

où le second membre est convergent pour toute valeur positive de x, puisque, $F(x)$ étant du genre zéro, la serie

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \ldots$$

est elle même convergente.

Soit S_p la somme des p premiers termes de la série contenue dans le second membre de l'égalité (4), on a

$$S_p < \frac{p}{x + a_1};$$

cette quantité tend vers zéro, quel que soit p, quand x croît indéfiniment, donc S_p a pour limite zéro et il en est de même de $\frac{F'(x)}{F(x)}$.

On a d'ailleurs

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = -\frac{1}{(x + a_1)^2} - \frac{1}{(x + a_2)^2} - \frac{1}{(x + a_3)^2} - \cdots$$

$$+ \left[\frac{1}{x + a_1} + \frac{1}{x + a_2} + \frac{1}{x + a_3} + \cdots\right]^2;$$

on voit, à fortiori, que $\frac{F''(x)}{F(x)}$ a pour limite zéro.

D'où il suit, le second membre de l'identité (3) ayant pour limite zéro, que a est nul.

La transcendante de Bessel est donc une fonction du genre zéro.

20. Aux considérations précédentes se rattache encore le théorème qui suit:

Si l'équation

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n = 0$$

a toutes ses racines réelles et de même signe; l'équation

$$a_0 \cos\lambda + a_1 \cos(\lambda + \theta) x + a_2 \cos(\lambda + 2\theta) x^2 + a_3 \cos(\lambda + 3\theta) x^3 + \dots$$

$$\dots + a_n \cos(\lambda + n\theta) x^n = 0,$$

où λ et θ désignent deux arcs arbitraires, a toutes ses racines réelles.

Pour le démontrer, je m'appuierai sur cette remarque importante due à M. Hermite: (1)

---

(1) *Sur l'indice des fractions rationnelles* (Bulletin de la Soc. Math., T. 7, p. 131); voir également, sur ce sujet, mes *Notes sur la résolution des équations numériques*, p. 48.

Si, pour toutes les racines de l'équation $F(x) = 0$, les coefficients de i sont de même signe et si, mettant en évidence dans le polynôme $F(x)$ la partie réelle et la partie imaginaire, on pose

$$F(x) = F_1(x) + iF_2(x),$$

les racines de l'équation

$$\alpha F_1(x) + \beta F_2(x) = 0,$$

où α et β désignent des nombres arbitraires, sont toutes réelles.

Considérons maintenant l'équation

$$f[x(\cos\omega + i\sin\omega)] = 0; \tag{5}$$

dont les racines, en désignant par $k_1, k_2, k_3, \ldots$ les racines de l'équation $f(x) = 0$, sont

$$k_1(\cos\omega - i\sin\omega), \quad k_2(\cos\omega - i\sin\omega), \quad k_3(\cos\omega - i\sin\omega), \quad \text{etc.}$$

Il est clair, puisque les k_i sont tous de même signe, que le coefficient de i a le même signe dans toutes les racines de l'équation (5).

Or on a

$$\begin{aligned} f[x(\cos\omega + i\sin\omega)] = a_0 + a_1\cos\omega\,.\,x + a_2\cos 2\omega\,.\,x^2 + \ldots + a_n\cos n\omega\,.\,x^n \\ + i[a_1\sin\omega\,.\,x + a_2\sin 2\omega\,.\,x^2 + \ldots + a_n\sin n\omega\,.\,x^n]. \end{aligned}$$

En vertu du théorème de M. Hermite, on voit donc que l'équation

$$\begin{aligned} \cos\lambda[a_0 + a_1\cos\omega\,.\,x + a_2\cos 2\omega\,.\,x^2 + \ldots] \\ - \sin\lambda[a_1\sin\omega\,.\,x + a_2\sin 2\omega\,.\,x^2 + \ldots] = 0 \end{aligned}$$

a toutes ses racines réelles, quels que soient les arcs réels λ et ω.

Or cette équation peut s'écrire

$$a_0\cos\lambda + a_1\cos(\lambda + \omega)x + a_2\cos(\lambda + 2\omega)x^2 + \ldots + a_n\cos(\lambda + n\omega)x^n = 0:$$

ce qui démontre la proposition que j'avais énoncée.

RECHERCHES HYDRODYNAMIQUES.

PREMIER MÉMOIRE.

LES ÉQUATIONS HYDRODYNAMIQUES ET LES RELATIONS SUPPLÉMENTAIRES

PAR

C. A. BJERKNES
À CHRISTIANIA.

Au moyen de vibrations de corps plongés dans un fluide, on peut imiter les phénomènes fondamentaux du magnétisme, et en grande partie aussi ceux de l'électricité. Je me propose dans une série d'articles d'en donner la théorie mathématique.

Le fond même de ces recherches a été publié autrefois; mais il nous reste à y faire des additions et des développements sans lesquels les conséquences ne peuvent être expliquées d'une manière satisfaisante.

Dans ces comparaisons, il s'est manifesté une particularité très caractéristique: les phénomènes hydrodynamiques correspondant aux phénomènes de l'influence présentent, vis à vis de ces phénomènes de la nature, une analogie directe; ceux, au contraire, qui répondent aux actions pondéromotrices présentent une analogie inverse.

Ce contraste singulier et, en même temps, cette ressemblance s'étendant jusqu'aux moindres détails avaient fait naître des craintes sur la possibilité d'une erreur; c'est ce qui nous a engagé à commencer des expériences par lesquelles les résultats analytiques ont trouvé maintenant leur constatation expérimentale.

Mais, de plus, une nouvelle idée se fera alors jour. Nous pourrions nous imaginer un perfectionnement de la théorie, d'après lequel on aurait égard aussi aux chocs et aux contacts momentanés entre les corps vibrants; on pourrait aussi modifier et compléter les mouvements, et choisir, au lieu d'un fluide incompressible, un autre fluide, ou même un milieu tout différemment constitué: un milieu de petits corps vibrants. Cela nous amènerait, peut-être, à des résultats ressemblant encore plus à ceux de la nature. Ou, si cela ne se réalisait pas, l'on pourrait compléter les représentations des phénomènes naturels, tout en conservant cette inversion qui s'est manifestée à chaque pas dans les généralisations.

Il serait naturel, d'abord, tant que cela pourrait se faire par des considérations générales sur les fluides, de se demander dans quel sens se modifieraient les phénomènes quand on passerait des liquides aux fluides élastiques.

Déjà d'avance il paraît probable que, si certaines limites ne sont pas dépassées, on n'obtiendra pas de nouveaux résultats; et que surtout l'inversion, dans les actions des forces naissantes, ne disparaîtra pas. Mais si les faits sont d'accord avec ces prévisions, ils fourniront une extension importante des anciennes propositions.

On le prévoit en se figurant les liquides, non plus comme absolument incompressibles, mais seulement comme peu compressibles en les comparant avec les fluides aériformes. Il ne faudrait pas ensuite regarder les phénomènes comme se produisant sur des distances trop grandes: on devrait se représenter les points sur lesquels s'étendront les recherches comme appartenant au commencement d'une onde vibratoire, extrêmement étendue. Cette coïncidence des phénomènes s'est aussi produite dans des expériences exécutées dans l'air.

Dans le présent mémoire, nous fixerons l'attention sur une formule que nous allons démontrer. Prise en elle-même, cette formule n'est pas nouvelle puisqu'elle est une conséquence immédiate des équations fondamentales. Mais elle nous permettra d'établir ce résultat indiqué plus haut, qu'entre des limites suffisamment restreintes, il n'y aura aucune différence essentielle dans les phénomènes, qu'il s'agisse d'un liquide ou d'un fluide élastique.

C'est donc en dehors de ces premières limites, mais dans la même direction qu'il faut étendre ces recherches pour arriver à des phéno-

mènes coïncidant, sans traces d'inversion, avec ceux des grandes forces de la nature: en supposant qu'ils puissent être trouvés par cette voie.

Si l'on conserve l'intensité des vibrations, mais qu'on rende les périodes beaucoup plus courtes, de sorte que les longueurs des ondes ne soient plus si incomparablement grandes par rapport aux distances des corps, des phénomènes d'une nouvelle espèce naîtront. L'influence de ce changement portera sur deux points: d'abord les phénomènes dépendent du lieu qu'y occupent les corps, et ils diffèrent suivant que ces longueurs des ondes sont grandes ou petites par rapport aux dimensions de ceux-ci; puis il y a aussi une dépendance plus intimement liée à la propagation des ondes et qui paraît présenter de l'intérêt. Dans tous les détails, on ne peut cependant se faire, tout de suite, une idée nette de ce qui résultera d'une telle intervention de l'élasticité. Il faut qu'on se soit posé des problèmes particuliers et qu'on ait réussi à les résoudre.

Il se posera aussi d'autres questions ayant rapport à une extension des résultats, en sorte que l'analyse employée pourrait être transportée immédiatement à de nouvelles études.

On s'écarte de l'idéalité des fluides en ayant égard à leur viscosité. Pour le moment nous ne nous en occuperons pas; elle pourrait devenir un élément de nos futures recherches. Mais cette supposition de la fluidité parfaite présentera aussi des défauts en ce sens que l'élasticité d'un fluide aériforme ne se manifeste pas toujours aussi purement que dans le cas de l'équilibre. Il y a là quelque chose d'analogue à ce qu'on connaît des corps solides. Ceux-ci ne se présentent pas comme ces corps parfaitement élastiques dont on parle dans la mécanique rationnelle, en y considérant les phénomènes à leurs limites; et néanmoins, il n'y aura pas nécessairement pour cette raison de défaut dans leur élasticité. À cause de leur grandeur et de leur forme, à cause du temps que prendra la propagation d'un mouvement, etc. . . ., lorsqu'un choc sera fini il restera des vibrations internes, et celles-ci ne seront pas forcément dues à un manque de l'élasticité. Les phénomènes externes se montreront donc comme s'il y avait eu une espèce de demi-élasticité.

Il en est de même, quoique pour d'autres raisons, quant aux fluides élastiques. À cause de leurs mouvements vibratoires, la loi de Mariotte ne sera plus exacte. Pendant les condensations il se développera de la

chaleur; pendant les dilatations un refroidissement aura lieu. Et les choses se passeront comme si l'élasticité elle-même était modifiée.

Aussi long temps que les vibrations des corps, donnant lieu aux mouvements d'un tel fluide, seront bien régulières ou uniformes, et que les condensations seront assez petites, aucun changement essentiel ne se produira dans les résultats, non plus que dans la méthode que l'on suivra pour y parvenir; c'est seulement une constante dont la valeur devra être corrigée, la vitesse de propagation ne coïncidant pas avec celle que donnerait la loi indiquée si elle était admise encore comme vraie.

Si, cependant, l'on se place en dehors des questions qui sont ordinairement l'objet du calcul, si les mouvements ont un caractère moins régulier et si l'on a toujours égard au développement de la chaleur, alors des difficultés prendront naissance. Des changements soudains dans les vibrations, et, par conséquent, de nouvelles actions pourraient se produire; quelque temps après, ces nouvelles actions pourraient être interrompues subitemment à leur tour.

Il serait intéressant, sans doute, d'examiner comment les problèmes devraient être traités alors, au moins tant qu'on supposerait des circonstances simplifiantes comme l'existence de petites vitesses. Il serait aussi avantageux d'étudier à part quel côté de la question il importerait le plus d'approfondir. Car souvent, lorsqu'un problème résiste à tous les efforts faits pour en chercher la solution complète, on en peut résoudre une partie déterminée; et ce qui est le plus accessible pour le calcul est très ordinairement aussi le plus utile. Ainsi, dans le cas d'actions soudaines, les accélérations joueront un plus grand rôle que les vitesses; il est donc naturel, pour se rapprocher de la vérité, d'aborder la question en regardant les dernières comme très petites.

Dans ces recherches relativement à un sujet qui n'appartient plus à la mécanique toute seule, nous ne pourrons être, il est vrai, aussi sûrs de l'exactitude des résultats (peu généraux d'ailleurs mais très simples) qu'il serait à désirer. En quittant le domaine de la mécanique rationnelle, on est forcé de faire des hypothèses. Et si simples que soient ces hypothèses, on ne peut regarder les conséquences qui en sont déduites analytiquement que comme des résultats préliminaires, dont la vérité doit être confirmée expérimentalement.

Ces investigations auront, du reste, vis à vis de nos recherches princi-

pales, une position indépendante. Elles ont pour but de leur donner, autant qu'il est possible, un peu plus d'étendue. Car nous essayerons de montrer que les irrégularités dont nous venons de parler n'auront que peu d'importance, aussi long temps que l'on s'occupera, dans une question d'hydrodynamique, des parties qu'il est important d'étudier ici. On se servira, en conséquence, des moyens analytiques ordinaires et des anciennes méthodes.

Dans ce mémoire d'introduction, nous envisagerons surtout, dans la mesure de nos forces, les principes eux mêmes, pour en déduire quel est l'effet des passages d'un fluide à un autre et d'un mouvement à un autre. De cette manière, les résultats que nous développerons, plus tard, pour les liquides, nous tâcherons de les transférer aux fluides aériformes; et nous nous efforcerons de le faire dans toute l'étendue où cela sera compatible avec la différence de leur nature. Dans les mémoires suivants, nous aborderons alors les problèmes spéciaux, en supposant qu'on ait à traiter des liquides. Nous y omettrons, au moins provisoirement, toutes les questions concernant les moyens de modifier les résultats ou de les changer, peut-être, profondement dans leurs points essentiels.

I.

Les équations hydrodynamiques et les relations empiriques ou supplémentaires.

1. Soit q la densité, p la pression, et t le temps. Désignons de plus par x, y, z les coordonnées d'un point M dans un système d'axes rectilignes et rectangulaires; soit enfin u, v, w les composantes de la vitesse suivant les axes.

Dans un fluide doué d'une fluidité parfaite, les équations de mouvement s'écriront alors:

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

X, Y, Z désignent les composantes, suivant les axes des x, des y et des z, d'une *force extérieure,* rapportée à l'unité de masse. Et nous supposons, pour restreindre dans un certain but la généralité, que cette force dépende d'un potentiel, de sorte qu'on ait

$$X = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Nous concevrons, en outre,

$$-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad -\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad -\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial z}$$

comme les composantes d'une *force intérieure* sollicitant la même masse. Elle provient de l'action des pressions sur les surfaces des éléments et est censée agir, comme la précédente, dans tous les points de leur intérieur.

Les forces des deux espèces produisent, par leur coaction, une *force accélératrice,* dont les composantes sont déterminées par

$$\frac{du}{dt}, \qquad \frac{dv}{dt}, \qquad \frac{dw}{dt}.$$

Ainsi les dernières composantes se présentent comme des dérivées totales par rapport au temps, et en développant on aura en conséquence:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

À ces équations il faut ajouter l'équation de continuité

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (qu)}{\partial x} + \frac{\partial (qv)}{\partial y} + \frac{\partial (qw)}{\partial z} = 0.$$

Elle exprime que la masse d'un élément correspondant au point géométrique (x, y, z) ne variera pas pendant le temps.

Nous aurons encore des conditions relativement à l'état initial, aux surfaces libres, et à celles des corps qu'enferme le fluide et qui le terminent.

Si toutefois le fluide est indéfini et qu'il reste en repos à l'infini, le problème se simplifie. La vitesse tendra vers zéro à l'infini et la valeur de la pression vers une limite constante. Soit maintenant

$$F = 0$$

l'équation commune de toutes les surfaces des corps. Alors puisque, d'après une hypothèse généralement admise, une particule du fluide qui à un certain moment touche l'une de ces surfaces le fera aussi immédiatement après, il faut qu'on satisfasse à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

pourvu qu'on ait $F = 0$.

2. Les cinq inconnues p, q, u, v, w, ne peuvent être trouvées par ces équations toutes seules comme fonctions des coordonnées et du temps, par conséquent comme fonctions de x, y, z, t. Il peut y avoir aussi des solutions avec certaines valeurs particulières de p et de q, p_0 et q_0. Elles correspondent à un état d'équilibre qui n'existe pas, mais qui est censé pouvoir exister *virtuellement*, puisque la force extérieure dépend d'un potentiel.

Il est donc nécessaire, en étudiant, dans des circonstances variées, les propriétés physiques des fluides et les fluides des différentes espèces d'établir de nouvelles relations. Et ces *relations empiriques* ou *supplémentaires* devront être distinguées des équations plus proprement dites *hydrodynamiques*.

3. En premier lieu, on peut avoir une relation connue d'avance, ou autrement dit, une relation sans aucun caractère infinitésimal.

Préalablement nous nous bornons à représenter cette relation sous la forme

$$f(p, q) = 0.$$

Nous supposons ainsi que lès composantes de la vitesse, c'est à dire, que les trois autres quantités dont on cherche les valeurs (à côté de celles de p et de q) n'y entrent pas explicitement.

Cependant, si le mouvement ne joue pas un rôle direct, nous n'exclurons pas toute influence de ce côté. On peut être contraint d'admettre une certaine imperfection dans la fluidité; et alors la fonction f, qui conviendrait pour certaines espèces de mouvements, devrait au moins contenir des *constantes* qui pourraient *varier* en passant d'un problème donné à un autre. Il s'ensuivrait qu'en donnant une fois à celles-ci des valeurs correspondant au mouvement qu'on examinera, une autre fois des valeurs correspondant à l'équilibre, la valeur de p, déduite de la relation précédente, ne coïnciderait pas avec la valeur de p_0 correspondant au dernier état.

4. Particulièrement la relation pourrait ne pas contenir la pression. On aurait donc une équation exprimant que

$$q = Const.$$

Ainsi q est maintenant constant, et a toujours la même valeur.

Evidemment il s'agit ici des *liquides*.

Mais en passant de ces corps fluides de la mécanique rationnelle à ceux de la nature, il ne faut plus les concevoir, en sens absolu, comme incompressibles. Au lieu de dire qu'il n'y a pas de liaison entre la pression et la densité, ou bien entre la pression et la condensation, on doit donc admettre qu'il en existe; et même, si cela paraît nécessaire, on devra dans l'équation empirique et généralisée, introduire des quantités ayant rapport au mouvement. Comme pour les fluides en général, la pression s'exprime ainsi, approximativement, en fonction linéaire de la condensation, les coefficients pouvant être considérés comme constants ou non. Toutefois, les variations de la densité étant extrêmement petites, le coefficient du terme contenant cette condensation aura une valeur d'autant plus grande; et il en est de même, par conséquent, de la vitesse de propagation.

Ces variations n'ayant ordinairement aucune importance en elles-mêmes, on renonce à les chercher; et en allant à la limite, on remplacera la relation empirique inconnue, et plus exacte, mais peut-être beaucoup plus compliquée que celle des fluides élastiques, par une équation très simple, $q = const.$ Cela nous permet de résoudre les problèmes, lors même qu'il s'agirait d'évaluer les pressions.

L'évaluation des condensations, tant qu'elles proviennent des mouvements, sera donc aussi une question secondaire pour cette raison que ce sont les fortes variations principales des pressions qu'il faut d'abord connaître, au moins approximativement. S'il devenait nécessaire de déterminer les condensations, bien que leurs valeurs soient si faibles, on devrait recourir à la relation empirique donnée avec la seconde approximation. Mais les variations *additionnelles* des pressions étant du même ordre que les condensations, on serait amené à chercher ensemble les unes et les autres; ce qui donnerait lieu à de nouveaux problèmes ayant de l'intérêt dans le cas où les effets des pressions principales s'élimineraient.

5. La relation entre p et q pourrait ensuite être telle que même en se tenant à la première approximation, la pression y entrerait avec la densité. En d'autres termes, la condensation n'est plus négligeable; et la pression ne peut être évaluée séparément.

En résolvant par rapport à p, on parvient donc à une équation de la forme

$$p = \varphi(q),$$

tandis que pour l'équilibre on aura généralement

$$p_0 = \varphi_0(q_0).$$

L'indice 0 ajouté à φ désignera qu'on a varié convenablement les constantes de la fonction.

Ordinairement la pression s'exprime de la manière indiquée, c'est à dire sans aucune dépendance directe du mouvement, lorsqu'il s'agit des *fluides élastiques.* Mais il faut distinguer entre deux cas: le cas idéal et un autre qui est plus complexe.

Tout étant pris le plus simplement, une loi commune existera pour

l'équilibre et pour le mouvement. C'est celle de Mariotte, d'après laquelle la pression est proportionnelle à la densité. On a donc

$$p = kq$$

$$p_0 = kq_0,$$

et les fonctions φ et φ_0 sont identiques.

Mais si l'on s'éloigne de plus en plus de l'équilibre, si les mouvements sont très forts ou qu'ils varient rapidement, on peut être forcé de tenir compte des modifications que subira cette loi fondamentale. Pour conformer les résultats du calcul à ceux des expériences, on sera alors amené à regarder φ comme différent de φ_0.

6. La forme de φ, dans ce cas complexe, n'est pas encore donnée. Mais si, au lieu de la densité, on introduit de nouveau la condensation, et que celle-ci soit toujours petite, on peut se borner aux premiers termes dans le développement en série. Aucune autre chose n'est donc inconnue que les valeurs de quelques coefficients.

Dans un certain sens, tant que ces derniers peuvent être considérés comme constants, la relation empirique sera donc toujours *connue d'avance.* Toutefois, suivant le caractère du mouvement, on sera conduit à prendre les coefficients tantôt avec certaines valeurs, tantôt avec d'autres.

Si les mouvements ont un caractère assez irrégulier, ni l'un ni l'autre système de coefficients ne convient plus. La relation empirique ne peut alors être représentée par une équation de la forme simple $f(p, q) = 0$, et la question doit être considérée d'un point de vue plus élevé. Nous reprendrons cet objet plus tard, mais sous certaines conditions simplifiantes.

7. Les choses se compliquent aussi lorsque de ces questions relatives aux fluides élastiques (dans le cas d'une élasticité imparfaite), on revient aux liquides, mais qu'on les étudie quand ils *cessent* d'être *homogènes.*

Dans ce cas la relation empirique, ou plutôt *supplémentaire* (puisqu'on n'a plus recours à des propriétes qu'on puisse à proprement parler appeler physiques), n'est pas donnée sous forme finie; on est alors conduit à une équation différentielle. En effet, on aura la condition différentielle

$$\frac{dq}{dt} = 0,$$

ou en développant

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} + w\frac{\partial q}{\partial z} = 0;$$

condition qui exprime que la densité des particules, quoiqu'elle diffère de lieu en lieu au même instant, et de temps en temps au même point, demeurera invariable pendant leurs mouvements.

8. On peut donc avoir à traiter des problèmes concernant les liquides dans des cas où ils ne sont plus homogènes, ou bien où ils sont censés n'être pas absolument incompressibles. Pareillement on pourrait rencontrer des problèmes relatives aux fluides élastiques dans des cas où, à cause des phénomènes internes qui se développent, tout se passe comme s'il y avait des défauts dans leur élasticité. Nous ne parlons pas même des conséquences de la viscosité, à laquelle on devrait avoir égard d'avance, dans les équations des mouvements.

La solution de tels problèmes en partie hydrodynamiques, en partie physiques, présenterait de grandes difficultés. Lorsqu'il devient question de *travaux intérieurs,* que l'on néglige ordinairement, il faut recourir à la théorie mécanique de la chaleur; et même on pourrait être contraint de la combiner avec la théorie analytique de la propagation de la chaleur. Cela serait nécessaire, soit que les masses fluides échauffées se meuvent de telle façon qu'en moyenne, dans le cours d'une période, on ait repos, soit qu'elles se meuvent d'une manière plus générale, de sorte qu'on commettrait une trop grande erreur en négligeant leurs déplacements continus.

Mais quelles que soient les difficultés à vaincre en mettant le problème en équation, et en le résolvant, au moins il existera une solution. Les cinq inconnues

$$p,\ q,\ u,\ v,\ w,$$

s'exprimeront ainsi au moyen de certaines constantes et des quatre variables indépendantes x, y, z, t. Et celles-ci étant éliminées, on obtiendra une relation de la forme

$$f(p,\ q,\ u,\ v,\ w) = 0.$$

Il entrera donc, en général, dans la relation empirique, non seulement la

pression et la *densité,* mais aussi les *composantes de la vitesse.* En outre, on aura un nombre de constantes dépendant de celles du problème.

On peut donc supposer que dans tous les cas l'on possède une relation empirique sous forme finie, et qu'il n'y a jamais à s'occuper que d'une seule équation supplémentaire. Nous la désignerons comme réduite à la *forme finale.*

D'après cela, n'ayant rien à faire avec de nouvelles quantités et de nouvelles équations différentielles, on fera, suivant la nature du problème, différentes hypothèses quant au caractère de la relation. Ensuite on composera les résultats du calcul avec ceux des observations, pour en conclure dans quel cas et dans quelle étendue ces hypothèses seront utiles. On renonce donc à poursuivre les solutions par le moyen des méthodes directes, conduisant à des difficultés insurmontables, pour pouvoir obtenir, par d'autres voies, au moins quelques indications de ce qui se passe.

Dans un cas important, qui a rapport aux fluides gazeux, cas que nous allons traiter bientôt, nous nous baserons en particulier sur cette manière de voir.

II.

Variation d'une vibration uniforme à une autre, et changement des coefficients dans la relation empirique.

9. Nous reprenons la question de savoir comment se présente la relation supplémentaire dans le cas d'un fluide élastique, lorsqu'elle est réduite à la forme finale.

Comme la plus grande généralité le demande, nous posons ainsi, préalablement, p comme fonction de q, u, v, w, donnée par l'équation

$$f(p,\ q,\ u,\ v,\ w) = 0.$$

Mais nous faisons la restriction *que la vitesse dépend d'un potentiel.*

Puisque la force est déterminée aussi à l'aide d'un potentiel, on déduit des équations du mouvement que les termes $-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}$ etc. sont des dérivées partielles par rapport aux coordonnées, d'une seule fonction $-P$; et l'on en conclut que *la pression, pourvu qu'un tel potentiel existe, est fonction de la densité sans contenir les u, v, w.*

Pendant le temps où dure un état de potentiel, le mouvement ne joue dont aucun rôle *direct* dans la relation; et l'on revient à l'équation plus simple $f(p, q) = 0$, ou

$$p = \varphi(q).$$

L'équation correspondante pour l'équilibre est

$$p_0 = \varphi_0(q_0) = kq_0.$$

Mais rien ne décide, quand on ne se borne plus à considérer les fluides sous le point de vue le plus idéal, si φ et φ_0 seront les mêmes fonctions.

Ainsi en passant d'un état de potentiel à un autre, la fonction φ pourrait changer.

10. Imaginons-nous que les vitesses ne varient que faiblement de temps en temps, et que, de plus, elles ne soient pas bien fortes.

La chaleur qui, en vertu de ce manque de l'idéalité, se développe dans les condensations, aura alors le temps nécessaire pour s'échapper, en étant conduite aux parties environnantes du fluide et aux corps; et de même les dilatations ne seront accompagnées d'aucun refroidissement.

Il est donc naturel de supposer que la loi de MARIOTTE, qui est vraie pour l'équilibre, le soit aussi sous les suppositions actuelles; et cela même si la pression a essentiellement son origine dans les mouvements, aucune force extérieure n'agissant. Les fonctions φ et φ_0 sont ainsi les mêmes et la dernière étant connue, on en tire

$$p = kq,$$

comme au n° 5.

Si ensuite l'on y introduit la condensation σ, en posant

$$q = q_0(1 + \sigma),$$

on obtiendra

$$p = kq_0 + kq_0\sigma.$$

La pression sera donc, exactement, une fonction linéaire de la condensation. Elle a, de plus, un caractère spécial, puisque les deux coefficients sont égaux.

11. Nous choisissons, en second lieu, le mouvement d'une telle manière que les vitesses, même si elles restent toujours faibles, varient assez rapidement en grandeur et en direction. Cette circonstance pourrait être remplacée aussi par une plus grande intensité, sans que les variations soient bien prononcées.

Rien n'empêche d'ailleurs qu'on ait le même problème qu'auparavant: un problème de vibration, par exemple, où la période des vibrations chez les corps donnant lieu aux mouvements du fluide, serait raccourcie considérablement, sans que l'intensité de celles-ci fût amoindrie. Ou bien l'intensité pourrait être fortement augmentée sans que la durée des périodes fût diminuée. — Nous ne considérerons pas les forces extérieures, de sorte que q_0 sera constant.

Dans le cas des courtes périodes, la chaleur qui se produit n'a que très peu de temps pour se dissiper. Car il y aura une disproportion entre la conductibilité et cette rapidité avec laquelle les condensations et les dilatations se succèdent. D'autre part, lorsque les amplitudes croissent sans que la durée de la période change, de plus grandes quantités de chaleur se développent ou s'absorbent. Et à cause de la longueur des ondes, la dissipation ne sera pas complète. On ne doit donc non plus négliger l'effet des variations de la température.

Comme une conséquence de son augmentation dans les condensations et de sa diminution dans les dilatations, l'on obtient durant les premières une pression plus grande que d'après la loi de Mariotte, durant les dernières une pression plus petite. En général, on parvient à une relation entre la pression et la densité dont les constantes dépendent de la durée des périodes et de la grandeur des amplitudes.

12. Appliquons cela au premier cas, mais en allant à la limite. Il y aura donc une extrême rapidité dans les variations de la vitesse.

Au moyen de la théorie mécanique de chaleur, la pression se détermine alors comme il suit

$$p = jq^{\varkappa},$$

$\varkappa$ désignant le rapport entre la chaleur spécifique à pression constante et la chaleur spécifique à volume constant.

Donc les fonctions φ et φ_0 sont maintenant, même *analytiquement*, différentes. Pour l'air atmosphérique, on a d'ailleurs trouvé

$$\varkappa = 1{,}4;$$

de sorte que l'écart se montre bien essentiel.

Introduisant, cette fois encore, dans l'équation entre p et q la condensation, on en déduira

$$p = jq_0^{\varkappa} + \varkappa \cdot jq_0^{\varkappa}\sigma + \ldots$$

Par suite, si p se réduit à p_0 lorsque σ s'annule, et qu'on admette que p_0 soit égal à kq_0, ou à la pression d'équilibre, la formule précédente deviendra

$$p = kq_0(1 + \varkappa\sigma) = p_0(1 + \varkappa\sigma).$$

Si non, on peut bien encore poser:

$$p = p_0(1 + \varkappa\sigma),$$

mais p_0 aura une valeur modifiée.

Ainsi, soit que le terme constant ait varié ou non, la pression cesse, à la rigueur, d'être une fonction linéaire de la condensation. Et si, en outre, on néglige les puissances supérieures, et qu'on forme de cette sorte une telle relation linéaire et approchée, il n'y a plus égalité entre les coefficients, $\varkappa$ étant plus grand que l'unité.

13. Mais passons à un mouvement de potentiel auquel il correspond des vitesses de vibration ayant une intensité moyenne et dans lequel la durée des périodes n'est plus si excessivement courte.

Alors, comme nous l'avons dit, il y aura bien une dissipation de la chaleur, mais elle ne sera pas si complète qu'on puisse regarder la

température comme restant constante. Il sera donc certainement difficile d'indiquer la forme exacte de la fonction. On posera, en conséquence,

$$p = \varphi(q),$$

et l'on se réservera, en ayant égard au caractère du mouvement et aux propriétés du fluide, de déterminer, pour chaque cas, les termes principaux dans le développement suivant les puissances de σ.

Or si l'on se contente de garder, à côté du terme constant, celui du premier ordre, on peut se figurer qu'on soit parti d'une formule analogue à celles des cas précédents:

$$p = jq^{\lambda}.$$

λ est alors un nombre compris entre 1 et $\varkappa$. Quant à j, on pourrait admettre que

$$p_0 = jq_0^{\lambda} = kq_0;$$

ce qui signifierait que la pression se réduit à celle de l'équilibre, lorsque la condensation s'annule. Ou bien, on pourrait laisser la valeur de j indéterminée, en n'acceptant pas comme certain qu'une coïncidence absolue existe.

14. En résumé, on peut donc prétendre que toujours lorsqu'il existe, à la fois, un potentiel de force et un potentiel de vitesse, et qu'il est permis, en même temps, de négliger la seconde puissance de la condensation, on parvient à une relation de la forme

$$p = p_0(1 + \lambda\sigma).$$

Nous laissons indécise la question de savoir si p_0 coïncide avec le p_0 qui correspond à l'équilibre, c'est à dire à kq_0, ou s'il y a entre eux une différence. Mais ni p_0 ni λ ne dépendront de la vitesse.

p_0 et λ (l'un ou tous deux) varieront, au contraire, *de problème en problème,* avec la durée des périodes et avec la grandeur des amplitudes. Ils pourront dépendre aussi d'autres constantes se rapportant à la nature du fluide et aux mouvements comme aux formes et au nombre des corps qu'il contient. Nous supposerons surtout dans ce cas que ces corps soient animés de mouvements vibratoires synchrones, et en supposant que ces

mouvements restent bien réguliers ou *uniformes,* nous admettrons, comme on le fait ordinairement, qu'un potentiel puisse exister.

Pour un autre choix des *constantes du problème,* les coefficients de la relation empirique se modifieront aussi. Mais il est bon de remarquer que c'est seulement pour des variations très grandes des premières qu'il peut être question d'une variation sensible des secondes.

III.

Vibrations variées. Changement du caractère de la relation empirique.

15. Ayons toujours égard au développement de la chaleur; et faisons voir que la relation cherchée pourrait revêtir aussi un caractère différent. Il en sera ainsi, par exemple, si les vibrations des corps, qui sont la cause des mouvements, ne sont plus régulières.

16. Pour le reconnaître, considérons une espèce particulière de telles *vibrations variées.*

Au commencement, la durée des périodes, si l'on en peut parler encore, est censée être très longue; et les vibrations sont supposées à peu près uniformes. Vers la fin, au contraire, cette durée deviendra excessivement courte, et les vibrations seront de nouveau à peu près régulières. Nous supposerons aussi que l'intensité des vibrations soit alors diminuée, en sorte que les condensations dans les deux époques ne différeront que peu.

Mais il existera ainsi un temps intermédiaire où les vibrations commenceront à varier plus fortement; cette variation ira d'abord en croissant, l'intensité s'affaiblira graduellement, et la rapidité avec laquelle les vibrations se succèdent augmentera; puis la variation deviendra plus lente, et enfin le nombre des vibrations dans l'unité de temps, ainsi que l'intensité de ces vibrations tendront de nouveau vers des limites constantes.

17. Si donc la valeur $\lambda = 1$ convient dans le premier temps, pourvu qu'on raisonne comme si un mouvement de potentiel fut exactement

possible, λ finira par prendre une valeur s'approchant de $\varkappa$. Car aux mêmes condensations, il repondra de plus fortes pressions.

Cependant, λ, qui varierait ainsi dans le *même* problème, ne contient pas le temps explicitement; puisque, dans la relation déterminant la pression, les quantités q, u, v, w, ou au lieu de celles-ci σ, u, v, w, remplacent le temps et les coordonnées.

Admettons donc, comme ailleurs, que les puissances de σ plus hautes que la première puissent être négligées. Figurons-nous, en conséquence, que la pression soit représentée toujours par une équation comme celle qui précède:

$$p = p_0(1 + \lambda\sigma),$$

ou bien

$$p - p_0 = q_0 a^2 \sigma.$$

Cela étant, au moins λ ne peut être indépendant des variations des mouvements; ce coefficient λ sera ainsi une *fonction des composantes de la vitesse.*

18. On ne peut même surement prétendre que p_0 est constant. À $\sigma = 0$, aussi bien qu'à $\sigma = \sigma_1$, il pourrait correspondre des pressions différentes. Voici en effet une raison en faveur de la variabilité de p_0.

Nous savons qu'à la limite, lorsque le nombre des vibrations (dans l'unité de temps) devient de plus en plus grand, sans que l'intensité soit trop diminuée, λ tendra vers une valeur constante, $\varkappa$ qui est le rapport entre les chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant. Cependant il y aura aussi une différence, bien qu'ordinairement faible, entre les vitesses de propagation a dans le cas d'une petite et dans le cas d'une grande intensité des vibrations. Mais a pouvant ainsi varier tandis que λ, comme on l'admet, conservera une valeur peu différente de $\varkappa$, de l'équation

$$p_0 \lambda = q_0 a^2$$

on conclut que p_0 changera aussi. Particulièrement il le fera de manière qu'il croisse avec l'intensité de la vitesse vibratoire.

On sait encore que dans le voisinage d'un corps d'où part un ébranlement soudain et violent, c'est-à dire précisément là où le mouvement est le plus fort, la vitesse de propagation aura de plus grandes valeurs qu'à des distances considérables.

19. En même temps que les coefficients varient, le mouvement dans le fluide change aussi de caractère. Il *cesse,* rigoureusement parlant, d'être un mouvement de *potentiel.* Car p ne dépendant plus de q tout seul, les termes $-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}$ etc. ne peuvent être exactement des dérivées partielles d'une fonction unique. Il en sera donc le même des composantes de la vitesse.

IV.

Vibrations uniformément variées.

20. Parmi les mouvements vibratoires et variées, il y en a quelques-uns qui, étant les plus élémentaires, mériteront une attention spéciale. Nous les désignerons sous le nom de *vibrations uniformément variées;* et on doit bien les distinguer de ces mouvements compliqués dont nous nous sommes servi, plus haut, pour mettre en évidence un caractère plus général de la relation empirique.

Montrons par un exemple, très facile à généraliser, comment d'un problème de vibrations uniformes on passera à des problèmes voisins dans lesquels on rencontrera des vibrations variées de l'espèce indiquée.

Nous considérerons en commençant le cas qui nous paraît le plus élémentaire et le plus instructif, et nous varierons ensuite un à un les éléments du problème.

Aussi longtemps, en effet, qu'on ne sait pas traiter la question rationnellement, avec toutes les ressources que fourniraient les branches diverses de la mécanique de la chaleur, il faut se borner à chercher quelle est la forme approchée des fonctions, ou quel est le caractère de ces nouvelles constantes qui, dans des circonstances simplifiantes, pourraient remplacer les coefficients des anciens problèmes. Et dans ces recherches, basées sur des faits expérimentaux mais incomplets, nous ne nous guiderons donc que sur des considérations générales concernant la nature des fonctions telles qu'elles se présentent le plus ordinairement.

Nous supposerons, jusqu'à ce que les conséquences obtenues exigent des modifications dans un sens déterminé, que *ces fonctions* cherchées ne présentent *aucune espèce de singularité* quant à leur continuité, quant à la possibilité d'être développées etc.

Naturellement les résultats auxquels on doit s'attendre dans de telles conditions ne peuvent consister alors qu'en de petites extensions et modifications des relations connues. Un objet principal de ces discussions sera donc de montrer qu'on peut encore se servir de ces relations pour des problèmes d'une nouvelle espèce, traités approximativement, en attribuant seulement aux coefficients des valeurs différentes.

21. Nous considérons une sphère »pulsante», c'est à dire une sphère dont le volume varie, comme la source d'où dérivent les mouvements dans le fluide. Le centre de la sphère est au repos, et la vitesse radiale à sa surface est déterminée par une expression de la forme suivante

$$j \sin ht.$$

Si maintenant j et h sont des constantes, un mouvement de potentiel sera possible. Dans la relation empirique, p_0 et λ sont donc aussi des constantes, dont les valeurs dépendent seulement des constantes du problème, j et h; et celles-ci ne changent que lorsqu'on passe d'un problème à un autre.

22. Mais l'intensité j des pulsations pourrait varier avec le temps; nous supposerons qu'elle en soit une fonction linéaire:

$$j = j_0 + j_1 t.$$

Ou bien h, qui indique le nombre des vibrations dans l'unité de temps, ou la hauteur du son, serait, de son côté, variable; et serait de nouveau une fonction linéaire du temps:

$$h = h_0 + \frac{1}{2} h_1 t.$$

Alors l'argument ht du sinus, qui pourrait être comparé à un nombre croissant, ou à un chemin parcouru, deviendrait une fonction de *second* degré:

$$h_0 t + \frac{1}{2} h_1 t^2.$$

Dans le premier cas, l'intensité varie donc d'une manière uniforme, mais la vitesse s'annule périodiquement. En d'autres termes, le son devient plus fort ou plus faible, mais la hauteur reste la même.

Dans l'autre cas, l'intensité se conserve, et la vitesse s'annule après des intervalles de temps inégaux; c'est à dire, que la hauteur change, mais qu'il n'y a pas de variation en intensité. Ici cependant le mouvement n'a plus immédiatement un caractère aussi simple; nous emploierons néanmoins la dénomination proposée, puisque, en quelque sorte, il existera un *mouvement coordonné* et uniformément varié, avec lequel on peut comparer le mouvement considéré: c'est celui qui est indiqué par *l'argument, ht.*

On se prépare ainsi le passage à des problèmes plus généraux, dépendant, cette fois, de *trois* constantes j_0, j_1, h ou j, h_0, h_1; et l'on y arrive en variant ou l'intensité ou le nombre des vibrations.

23. En faisant abstraction du signe, nous prenons d'ailleurs comme mésure de la première grandeur, »*l'intensité variable*», le fonction-facteur j ou

$$j_0 + j_1 t.$$

j_0 est la valeur initiale de l'intensité variable, la dérivée j_1 est la *fluxion* de cette intensité; elle indique donc avec quelle vitesse elle croît.

Pareillement la rapidité, dans la succession des vibrations, peut se mesurer comme une vitesse, en prenant la dérivée d'une certaine fonction par rapport au temps. Cette fonction est *l'argument* de la fonction périodique; et la vitesse cherchée, dans le mouvement coordonné, est donc

$$h_0 + h_1 t.$$

h_0 se rapporte au temps initial, h_1 désigne de quelle manière s'accélère cette vitesse spéciale, ou bien la *fluxion de ce mouvement fictif.*

On observe aussi que si l'on prend un temps $\tau + t$, très voisin de τ, et que l'on néglige une quantité du second ordre, l'argument devient à une constante près égal à

$$(h_0 + h_1 \tau) t.$$

On en conclut que, pourvu qu'on fixe un certain moment τ, on peut considérer le nouveau coefficient h_τ, où

$$h_\tau = h_0 + h_1 \tau.$$

comme inversément proportionnel, au moment donné, à la durée d'une période, ou comme indiquant la hauteur du son au même moment.

24. Pour fixer les idées, occupons-nous particulièrement du dernier problème. Le premier se traite de la même manière, et il n'y a de différences que dans les conclusions auxquelles on arrivera.

Nous désignons par U la vitesse au point (x, y, z) du fluide. Si donc les mouvements qui s'y produisent n'ont d'autre cause que les pulsations de la sphère, la vitesse est radiale; et elle peut être et positive et négative. Au lieu d'exprimer p_0 et λ comme fonctions de u, v, w, contenant les constantes j, h_0, h_1, on peut donc dire qu'ils dépendent des mêmes constantes et d'une *seule variable* U.

De cette façon, on aura encore des valeurs différentes pour les coefficients suivant qu'il s'agit d'un éloignement ou d'un rapprochement par rapport à la sphère.

1°. Nous allons introduire cependant une restriction bien naturelle: soit qu'elle tienne à la nature des choses, soit qu'elle n'ait pour but que de dégager du grand nombre de problèmes un nouveau groupe, qui puisse être soumis au calcul. Faisons l'hypothèse que la *pression, quoique dépendant de la vitesse, soit indépendante de sa direction.*

Si V désigne le carré de la vitesse, on aura alors

$$p_0 = \varphi(j,\ h_0,\ h_1,\ V)$$

$$\lambda = f(j,\ h_0,\ h_1,\ V).$$

2°. Ensuite, tant que l'argument sera assez simple pour représenter en lui-même un mouvement *uniformément varié,* nous admettrons qu'on s'approche suffisament de la vérité en considérant, *pour toute l'époque,* φ et f comme des *fonctions développables suivant les puissances entières de* V.

Cela étant admis, les fonctions essentiellement positives φ et f seront d'une telle nature que si l'on y pose

$$h_1 = 0,$$

que par suite, V se réduise à V_0, les valeurs que prennent ces expressions

$$\varphi(j,\ h_0,\ 0,\ V_0) \quad \text{et} \quad f(j,\ h_0,\ 0,\ V_0)$$

ne dépendent pas de V_0. Cependant V_0 aussi bien que V peut prendre un nombre infini de valeurs. Nous en concluons, puisqu'il existe un développement suivant les puissances de V, qu'aussi les expressions

$$\varphi(j,\ h_0,\ 0,\ V) \quad \text{et} \quad f(j,\ h_0,\ 0,\ V)$$

sont indépendantes de V.

Dans la relation empirique, écrite sous la forme

$$p = p_0(1 + \lambda\sigma),$$

p_0 et λ sont donc d'abord des fonctions des *constantes fondamentales*, j, h_0, h_1 et du carré de la vitesse au point donné; nous pourrons dire aussi qu'ils dépendent de *l'énergie* au point et des mêmes constantes. Et parmi ces dernières, la constante h_1, qui détermine comment la hauteur du son, représenté par les vibrations de la sphère, s'élève ou s'abaisse, entrera dans les fonctions φ et f d'une manière caractéristique: quelles que soient, en effet les valeurs qu'on attribuera à V, considéré comme une variable indépendante, *si l'on égale h_1 à zéro, V s'éliminera.* En d'autres termes, l'on aura

$$\varphi(j,\ h_0,\ 0,\ V) = \varphi(j,\ h_0,\ 0,\ 0)$$

$$f(j,\ h_0,\ 0,\ V) = f(j,\ h_0,\ 0,\ 0).$$

25. Soient, de plus, U et U_0 des quantités très petites, V et V_0 par suite des quantités du second ordre. Développons alors, conformément à la seconde hypothèse, φ et f suivant les puissances croissantes de V.

Cela posé, si l'on néglige les puissances supérieures, ni p_0 ni λ ne contiendront plus la vitesse, et l'on aura simplement

$$p_0 = \varphi(j,\ h_0,\ h_1,\ 0)$$

$$\lambda = f(j,\ h_0,\ h_1,\ 0).$$

Il s'ensuit que dans le cas de *vibrations uniformément variées et de petites vitesses,* on aura le grand avantage que la *relation conservera sa forme normale;* toutefois, il faudra, pour cela, négliger les quantités du second ordre. p_0 et λ dépendront ensuite de *trois* constantes, j, h_0, h_1: ou bien de *l'intensité des vibrations,* de *la vitesse initiale dans le mouvement coordonné,* et de *la fluxion de ce mouvement fictif.*

Cela ne convient cependant que pour un *temps fini*. Étant donnée une telle époque, on diminuera, si cela devient nécessaire, l'intensité jusqu'à ce que la relation acquière le degré d'exactitude que l'on demande.

26. On remarquera que si la vitesse vibratoire ne peut être négligée dans les expressions de φ et de f, celles-ci, en conséquence des hypothèses admises, auront essentiellement un caractère oscillant.

La vitesse de pulsation, bien que ses périodes soient inégales, s'annulera une fois dans chacune des moitiés. À la surface du corps, φ et f doivent donc aussi reprendre les valeurs correspondant aux moments où la vitesse est nulle. Et c'est seulement à cause d'un changement de la condensation que la pression, dans des moments différents de cette même espèce, pourrait acquérir des valeurs modifiées.

Hors du corps, à de plus grandes distances, il en pourrait être autrement, puisque dans le fluide élastique la vitesse ne disparaîtra pas simultanément en tous points comme dans le liquide. Mais là les mouvements sont aussi plus faibles.

Donc φ et f, et par conséquent les coefficients, p_0 et λ, reprendront dans chacune des périodes une fois une ancienne valeur à la surface du corps; et, approximativement, cela aura lieu aussi quand on s'en éloigne. Les coefficients auront donc un caractère oscillant comme nous venons de l'expliquer.

Afin qu'il en soit autrement, il faudrait que les fonctions soient d'une espèce plus transcendentale; de sorte qu'elles ne pourraient pas être développées suivant les puissances de V. Elles devraient acquérir ainsi de nouvelles valeurs chaque fois que V s'annulerait.

27. Si en laissant ces problèmes où l'intensité se conserve, on revient à ceux où il n'en est pas ainsi, les coefficients subiront des changements plus forts. Car quoique V s'annule encore périodiquement sur la surface du corps, ni là ni à des distances plus ou moins grandes de cette surface, ses valeurs moyennes, pendant le cours d'une période, ne seront plus essentiellement les mêmes de temps en temps; on arrivera donc au même résultat quant aux fonctions φ et f, ou bien quant aux p_0 et λ.

V.

Suite sur les vibrations variées. Petites vitesses et seconde approximation.

28. Généralisons les considérations précédentes en ne considérant pas seulement une sphère pulsante unique. Étendons-les à un nombre quelconque de corps de formes différentes effectuant des vibrations uniformément variées de toute espèce. Ayons enfin égard à la seconde puissance de la condensation.

Cela posé, nous écrirons

$$p = p_0(1 + Q + \lambda\sigma + \frac{1}{2}\mu\sigma^2),$$

p_0 étant la valeur constante que prendra la pression p si à la fois la condensation et la vitesse s'annulent. Pour plus de simplicité, nous supposerons qu'il n'y ait pas de forces extérieures.

Donc si l'on admet toujours, comme plus haut, que la *pression ne dépende pas de la direction de la vitesse,* Q, λ et μ peuvent être considérés comme fonctions seulement de V (c'est à dire du carré de la vitesse) et des constantes du problème.

Nous admettrons de nouveau qu'il soit permis de *les développer suivant les puissances entières de V.* Et nous le ferons aussi, si les vibrations ne sont plus uniformément variées, mais qu'on puisse seulement les considérer comme telles en ne s'occupant que d'un intervalle de temps assez court.

29. Pour arriver à des résultats plus déterminés, reprenons ici la supposition simplifiante que les *vitesses* soient très *petites.* Mais gardons les quantités du second ordre. Cela n'empêche pas, comme nous le savons, qu'il puisse exister des accélérations marquées ou de grandes variations dans la rapidité avec laquelle les vibrations se succèdent.

Cela étant, λ et μ seront indépendants de V, car autrement on aurait des termes d'un ordre trop élevé.

Q, au contraire, en dépendra, et l'on trouve

$$Q = \frac{1}{2}\nu V;$$

Q, en effet, s'évanouit quand on fait converger V vers zéro. D'un autre côté, ν va disparaître, si l'on fait varier les constantes de façon à revenir à un problème de potentiel.

Ainsi on arrive à la relation

$$p = p_0(1 + \frac{1}{2}\nu V + \lambda\sigma + \frac{1}{2}\mu\sigma^2),$$

λ, μ, ν, p_0, *étant* des *constantes.* On observe encore qu'en passant au problème de potentiel, ν s'annule, et les autres coefficients prennent, respectivement, des valeurs différentes.

30. Donnons maintenant aux constantes fondamentales des valeurs peu différentes de celles qui correspondent à un problème de potentiel. En considérant un intervalle de temps assez court, on peut donc s'imaginer qu'à côté des constantes originaires, représentées par

$$h,$$

on en aura d'autres représentées par

$$h_1',$$

et qui seront très petites. Nous les désignerons comme les *constantes d'accélération.*

Alors ν devient une quantité du *premier* ordre, et l'on aura simplement

$$p = p_0(1 + \lambda\sigma + \frac{1}{2}\sigma^2).$$

31. D'après cela, en résumant et généralisant, on parvient à la *proposition suivante:*

Si la pression, exprimée comme fonction de la condensation et de la vitesse, est censée être indépendante de la direction de celle-ci; si, de plus, les vitesses sont très petites, de sorte qu'on puisse négliger les quantités d'un ordre plus élevé que le second; si enfin les constantes du

problème sont telles que, rigoureusement parlant, aucun potentiel de vitesse n'existe: alors, *sauf un terme d'énergie*

$$\frac{1}{2} p_0 \nu V,$$

la pression sera une fonction de second degré par rapport à la condensation.

Les coefficients varient avec les constantes du problème; et, en faisant tendre vers zéro *les constantes d'accélération,* le terme d'énergie disparaît.

Si enfin ces dernières sont très petites, avec l'approximation demandée, la pression deviendra seulement fonction de la condensation.

32. Toutes les fois que le terme d'énergie ne disparaîtra pas, toutes les fois par conséquent que les constantes d'accélération auront des valeurs finies, ce n'est qu'improprement qu'on pourra parler d'un potentiel de vitesse. Mais nous le ferons encore, pour des raisons que nous développerons, pourvu que toujours les vitesses soient très petites.

Nous remarquerons que les termes $-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}$ etc. ne sont plus, *absolument* parlé, des dérivées par rapport aux coordonnées. Car quoique q s'exprime par σ, p ne dépend pas de σ tout seul.

Cependant, si l'on se rappelle que les termes du troisième ordre doivent être négligés, l'expression précédente peut être conçue comme provenant d'une différentiation. En effet, le carré V de la vitesse étant du second ordre, $-\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}$ s'écrira (en posant d'ailleurs $p_0 = kq_0$), de la manière suivante:

$$-k\left(\frac{1}{2}\nu\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda(1-\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mu\sigma\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right);$$

et cette expression est la dérivée par rapport à x d'une autre

$$-P$$

où

$$P = k\left(\frac{1}{2}\nu V + \lambda(\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2) + \frac{1}{2}\mu\sigma^2\right).$$

On peut donc dire que, pour *l'époque choisie,* on aura un potentiel *en diminuant assez l'intensité des vibrations.*

33. Dans ce qui précède, nous avons considéré un mouvement vibratoire et varié qui, rigoreusement, ne permettrait jamais aucun potentiel, même si l'on prenait intervalle de temps aussi court que l'on voudrait.

Maintenant nous nous représenterons les vibrations des corps comme étant régulières à partir de l'instant initial pendant un temps fini. De cette façon elles seront complètement compatibles avec l'existence d'un potentiel: ce qui doit être conforme aussi à l'état initial. Mais supposons qu'au bout d'un certain temps, le caractère des vibrations change.

Alors si les condensations restent petites et qu'on demande une formule *unique* pour tout l'intervalle de temps considéré, on aura encore une relation de la forme:

$$p = p_0(1 + Q + \lambda\sigma + \frac{1}{2}\mu\sigma^2).$$

Et Q, λ, μ seront des fonctions de la vitesse; car autrement la pression deviendrait la même fonction de la condensation que si le développement de la chaleur avait été toujours régulier.

Or, même au temps premier, où existe un potentiel de vitesse, celle-ci varie. Donc si les coefficients peuvent s'exprimer encore, pour toute époque, par des séries de puissances entières de V, ils en doivent être de telles fonctions que, dans toutes les variations que subira V, ils garderont les mêmes valeurs. Mais alors ils le feront aussi plus tard, lorsque la vitesse variera d'une manière essentiellement différente; car les constantes fondamentales ne devront pas changer. p serait ainsi toujours fonction de la seule condensation: ce qui est absurde.

Si l'on admettait ainsi que les coefficients, exprimés en fonctions du carré de la vitesse, eussent un caractère aussi simple, dans le cas d'un mouvement variant d'une manière si peu élémentaire, au sens analytique, aucune formule *unique* ne serait possible. Si une telle formule existait et si les Q, λ, μ s'exprimaient en fonctions de V de la manière que nous venons d'indiquer, l'existence d'un potentiel pour un temps fini entraînerait un potentiel exact pour tout l'intervalle de temps.

34. Quand il s'agit de mouvements accompagnés d'un développement de chaleur, l'hypothèse d'un potentiel n'exprime vraisemblablement, même dans le cas de vibrations régulières, qu'une vérité approchée. Le plus souvent on peut cependant partir de là sans commettre de grandes erreurs.

Donc si quelquefois il se présente, dans les problèmes, *une espèce de discontinuité* dans le passage d'un état qui est censé être compatible avec un potentiel à un ou plusieurs autres états qui ne le sont pas, il faut diviser le problème en plusieurs. Ces problèmes partiels se succèdent dans le temps, et ils répondent à des *relations empiriques distinctes.*

35. Ainsi quand, d'abord, on a eu des vibrations uniformes et, qu'après un court passage, des vibrations uniformes mais d'un nouveau caractère commencent, pour se servir de relations empiriques permettant le calcul, il faudra traiter les trois époques séparément. Pour la première et la dernière, les relations se présenteront sous leurs formes normales, mais avec des coefficients distincts. Dans la période moyenne il existera une relation plus compliquée.

Pourvu qu'alors on puisse remplacer avec assez d'exactitude le mouvement vibratoire et varié par un autre qui est *uniformément varié,* et que les *vitesses* soient *peu intenses,* on sera ramené ici encore à la *forme normale.* Seulement on aura à changer les valeurs des coefficients constants. Dans les trois cas, ces coefficients répondront, respectivement, à trois systèmes de constantes fondamentales; et le nombre de celles-ci sera plus grand dans le second cas que dans les autres.

VI.

Représentation hydrodynamique de la pression. Pressions partielles.

36. Nous avons essayé de donner une extension à la relation empirique, servant à déterminer la pression comme fonction de la condensation, ou comme fonction de celle-ci et de la vitesse. Toutefois il ne s'agit là que d'approximations et d'interpolations; et il ne faut pas s'écarter loin des mouvements ordinairement traités. En particulier, nous étions arrivés à cette conclusion que même en cas des vibrations peu régulières un état de potentiel subsisterait, pourvu que les vitesses fussent assez petites pour que l'on pût négliger les puissances du troisième dégré.

Nous allons fixer maintenant notre attention plutôt vers le caractère *hydrodynamique* que *physique* de la pression. En d'autres termes, nous passons à une autre forme de représentation, et en traitant les équations générales nous ferons usage de la dite relation.

Un fait remarquable se manifestera alors. Dans *l'expression hydrodynamique* de p, certains coefficients de la relation empirique ne se présentent pas: ce sont ceux qui appartiennent aux *termes du second ordre;* en particulier tous ceux qui dépendent du carré de la vitesse ou de celui de la condensation.

C'est d'abord lorsqu'il s'agit de déterminer avec la *seconde* approximation la grandeur de la dernière quantité qu'il est nécessaire d'avoir égard aux valeurs de ces *coefficients secondaires.*

37. On peut donc concevoir, comme il est dit, $\frac{1}{q}\frac{\partial p}{\partial x}$ etc. comme des dérivées, par rapport aux coordonnées, d'une fonction P, déterminé par l'intégrale

$$P = \int \frac{\partial p}{q}. \tag{1}$$

Et cela a lieu bien que q dépende de σ, p au contraire de σ *et de* V. Mais rappelons-nous que ce carré de la vitesse est du second ordre et que les quantités d'un ordre plus élevé doivent être négligées.

La vitesse pouvant ainsi être déterminée par un potentiel, après une première intégration des équations du mouvement on obtient l'équation suivante, exprimant la valeur de P:

$$P = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} V. \tag{2}$$

38. Le produit de P par la densité normale q_0,

$$p_i = P q_0,$$

ne désigne pas, généralement, la pression, mais il en constitue une partie caractéristique. Le potentiel φ étant connu, on en déduit la valeur de P de la même manière, que l'on ait à faire à un fluide incompressible ou à un fluide élastique. Et dans le premier cas, p_i est la *pression due aux mouvements des masses fluides.*

Nous pouvons donc dire que p_i est la pression provenant immédiatement de l'état des condensations et des mouvements, tels qu'ils existent au lieu. On se figure ainsi que les masses agitées, en exerçant leurs pressions, se comportent après comme des masses fluides incompressibles. Et pour cette raison, nous désignerons cette pression partielle, p_i, comme la *pression d'inertie*.

39. On a donc eu égard, en partie, à la compressibilité. Mais provisoirement, on néglige de le faire encore une fois, en ne voulant conclure qu'à la valeur de la dite pression spéciale.

La compressibilité joue cependant de nouveau un rôle. En effet, elle donne lieu à une pression additionnelle, pression qui n'existera pas dans le cas de l'incompressibilité, puisqu'elle s'annule lorsque les condensations sont censées tendre beaucoup plus rapidement vers zéro que la vitesse de propagation vers infini.

Cette pression, comme nous le verrons bientôt, est proportionnelle au carré de la condensation; de sorte qu'on en a effectivement un double emploi.

Nous le reconnaîtrons plus clairement quand nous passerons de l'évaluation de la pression d'inertie à celle de la pression complète.

40. Pour cet effet, partons de la relation empirique

$$(1) \qquad p = p_0\left(1 + \lambda\sigma + \frac{1}{2}\mu\sigma^2 + \frac{1}{2}\nu V\right),$$

ou d'ailleurs $p_0 = kq_0$. En développant ensuite la valeur de P, donnée par l'intégrale ci-dessus, nous obtiendrons de nouveau, comme au nº 32, après avoir introduit dans la dernière la valeur de p:

$$(2) \qquad P = k\left(\lambda\sigma + \frac{1}{2}(\mu - \lambda)\sigma^2 + \frac{1}{2}\nu V\right).$$

De là, en comparant (1) et (2), en posant $k\lambda = a^2$, et $p_p = \frac{1}{2}q_0 a^2\sigma^2$, on tire

$$(3) \qquad p = p_0 + p_i + p_p.$$

La pression additionnelle p_p se manifeste ainsi comme une *pression de propagation*. Elle naîtra parce que l'état de la condensation (ou de la

dilatation) qui existe au lieu, tend à s'en répandre, dans toutes les directions, avec une vitesse a, la *vitesse de propagation.*

41. De cette expression mixte, on peut passer à une autre, que nous appellerons *l'expression hydrodynamique de la pression;* et l'on y arrive en effectuant l'élimination de la condensation.

Si l'on part des deux expressions de P, l'expression *empirique,* donnée par (2) n° 40, et l'expression *hydrodynamique,* déterminée par (2) n° 37; si, de plus, on néglige ici les quantités d'un ordre plus élevé que le *premier,* on obtient

$$\text{(a)} \qquad a^2\sigma = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Il faut cependant se rappeler que σ et φ contiennent des termes et du premier et du second ordre. On devait ainsi poser plutôt

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \qquad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

σ_1 et φ_1 ne contenant que termes du premier ordre.

Dans l'équation différentielle qui précède, il en est de même du second membre. Si, en effet, l'équation des surfaces, $F = 0$, contient les paramètres

$$a_g, \; b_g, \; c_g, \; d_g \; \ldots\ldots \; a_k, \; b_k, \; c_k, \; d_k \; \ldots\ldots,$$

tous dépendant du temps, φ dépend aussi des mêmes quantités. Mais il contient encore le temps explicitément. On aura donc, en distinguant entre les ∂ et les δ:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\delta\varphi_1}{\delta t} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}a'_g + \ldots + \frac{\delta\varphi_2}{\delta t}.$$

Et dans cette équation, le premier terme à droite, comme le potentiel φ et ses dérivées par rapport aux coordonnées, est une quantité du premier ordre; les termes composés seront donc du second ordre, parce qu'ils contiennent les facteurs a'_g etc., qui sont censés être très petits. Enfin la dérivée partielle de φ_2, par rapport au temps, $\frac{\delta\varphi_2}{\delta t}$, est aussi de second ordre.

Il s'ensuit que l'équation (a) s'écrira, plus correctement,

$$(1) \qquad a^2\sigma_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial t};$$

et l'on en déduit, puisque $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ et $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$,

$$(1') \qquad a^2\sigma^2 = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}.$$

La *pression hydrodynamiquement exprimée,* ainsi exprimée en sorte qu'il n'y ait plus de trace de la condensation, prend donc la forme suivante:

$$(2) \qquad p = p_0 - q_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}V\right) + \frac{1}{2}q_0\cdot\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}.$$

Elle peut s'écrire aussi, en ayant égard à *l'ordre des termes,*

$$(2') \qquad p - p_0 = -q_0\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - q_0\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}a'_g + \ldots\right) + \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial t^2}\right].$$

42. Nous arriverons à cette équation encore d'une autre manière.

Multiplions la première des équations de mouvement par q, ou $q_0(1 + \sigma_1 + \ldots)$. Alors, puisqu'en développant on doit rejeter les termes d'un ordre plus élevé que le second, on aura

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -q_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - q_0\sigma_1\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{1}{2}q_0\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Mais en remarquant qu'avec la première approximation la relation empirique (e) s'écrira

$$(e) \qquad p - p_0 = q_0 a^2\sigma_1,$$

après avoir comparé, des deux côtés du signe, les termes du premier ordre et effectué l'intégration, on en déduit

$$(1) \qquad a^2\sigma_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial t},$$

comme plus haut.

On conclura donc comme auparavant que

$$(2) \qquad p = p_0 - q_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}V\right) + \frac{1}{2}q_0\cdot\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial t^2}.$$

Mais les termes qu'on obtient en effectuant les développements doivent être mis hors de considération s'ils surpassent le second ordre.

43. La pression se décompose ainsi en trois pressions partielles: la pression de transmission, la pression d'inertie et la pression de propagation. Nous donnerons maintenant aux dernières une explication *hydrodynamique*, servant à suppléer la précédente où l'on a eu égard d'une manière explicite à la compressibilité des masses. Nous avons:

1°. *La pression de transmission*

$$p_0 = kq_0 .$$

2°. *La pression d'inertie*

$$p_i = - q_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V\right).$$

Cette pression partielle est celle qu'exercent les masses fluides *en tant qu'elles se meuvent,* et *en tant qu'elles tendent à changer leurs mouvements comme des masses fluides élastiques*, supposé qu'elles *agissent* alors, c'est à dire en produisant cette pression, *comme des masses incompressibles.*

3°. *La pression de propagation*

$$p_p = \frac{1}{2} q_0 a^2 \sigma^2 = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{2} q_0 \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2} .$$

Elle sera à ajouter parce que les masses fluides n'agissent pas, au point où nous sommes, tout-à-fait *commes des masses incompressibles.* La pression additionnelle qui en provient exprime, pouvons-nous dire, *l'énergie avec laquelle le mouvement dans le fluide élastique tend à changer* au moment et au point en question. On voit, de plus, qu'il y a ici quelque chose qui est caractéristique pour les fluides élastiques. Car si l'on passe à la limite, en considérant ainsi les fluides incompressibles, le facteur

$$\frac{1}{2} q_0 \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2}$$

se modifiera sans devenir cependant infini, et de l'autre côté, le facteur

$$\frac{1}{a^2}$$

s'annulle, puisque la vitesse de propagation, a, est censée maintenant être infinie; on conclut donc que la pression de propagation va disparaître.

Il est bien à remarquer que la pression de propagation est *toujours positive.*

Nous observons aussi qu'elle est la seule pression partielle dans laquelle il entre, explicitement, quelque coefficient appartenant à la relation empirique. Ce coefficient étant a^2, il suffit même de connaître cette relation (e) dans sa forme la plus élémentaire, correspondant à la première approximation.

44. La *pression d'inertie* se décompose aussi en pressions partielles, ayant chacune un caractère distinct.

1°. On a d'abord la *pression de fluxion, p_{if},* ou

$$- q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Nous l'appellerons ainsi parce qu'on peut désigner la dérivée par rapport au temps comme une fluxion. Et cette pression correspond aussi à »*l'état de fluxion*» dans le mouvement, ou à l'état de mouvement qui se prépare.

2°. On a ensuite, comme nous dirons, la *pression d'énergie, p_{ie},* ou

$$- \frac{1}{2} q_0 V.$$

Elle est, en effet, représentée, au signe près, par une expression d'énergie. Cette pression, qui est du second ordre, est *toujours négative.*

Si l'on remplaçait $- q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ par $- q \frac{d\varphi}{dt}$, en rapportant ainsi la pression de fluxion au *point physique* et non pas au point géométrique, dans l'expression de la pression d'inertie

$$- q_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} V \right),$$

le terme contenant la pression d'énergie devait changer de signe et devenir une tension correspondante. En écrivant, en effet, $- q_0 \frac{d\varphi}{dt}$, pour parvenir à l'ancienne expression il faudra ajouter

$$q_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} u + \frac{\partial \varphi}{\partial y} v + \frac{\partial \varphi}{\partial z} w \right).$$

c'est à dire

$$q_0 V.$$

Mais cette expression se réduit avec $-\frac{1}{2} q_0 V$ à $\frac{1}{2} q_0 V$, et l'on aura

$$-q_0 \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} V \right).$$

Ce qu'il fallait démontrer.

45. La pression d'énergie n'est pas susceptible d'être partagée en pressions encore plus spéciales, à moins qu'on ne partage aussi le potentiel φ_1 en une somme de plusieurs. Mais c'est ce qui a lieu, au contraire, avec la *pression de fluxion,* qui s'écrira quand on la développe

$$-q_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - q_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - q_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_g} a'_g + \dots \right).$$

Elle se décompose, par suite, en trois pressions partielles, dont l'une a un caractère qui la rapproche sensiblement de la pression d'énergie, comme on le peut prévoir d'après la remarque qui précède, tandis que les autres accusent un caractère qui en diffère d'avantage.

1°. La première des pressions partielles qui sont contenues dans la pression de fluxion est

$$(1) \qquad -q_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}.$$

Elle est la seule de toutes qui soit de premier ordre, et elle est donc prédominante. Comme nous le savons, cette pression peut aussi s'exprimer comme il suit

$$q_0 a^2 \sigma_1,$$

et on devra alors la comprendre comme une *pression de condensation.*

Mais puisqu'on a la même expression lorsqu'il s'agit des fluides incompressibles (ou bien peu compressibles) que celle que nous avons exposée d'abord, nous préférons ici la concevoir *hydrodynamiquement,* c'est à dire conformément à cette première expression.

En faisant varier avec le temps le potentiel φ_1, nous considérons ici comme constants tous les paramètres, a_g, b_g, c_g, d_g, ..., a_k, ... etc., qui

déterminent, dans le sens le plus général, les mouvements des corps: en d'autres termes, leurs mouvements de translation, leurs rotations, et leurs déformations de toutes espèces. Mais on a égard aux changements dans ces mouvements qui se préparent, pourvu qu'on puisse considérer le potentiel comme étant aussi fonction des paramètres dérivés, a_g', b_g', c_g', d_g', ..., a_k', ... etc., désignant les vitesses dans tous les mouvements des corps; et s'il en est ainsi, on peut concevoir la pression qui en naît comme une *pression d'impulsion*. Plus généralement, nous dirons qu'on a une *pression d'influence*, puisque, indépendamment des mouvements des corps, tels qu'ils existent, il se manifeste entre ceux-ci et le fluide un rapport caractéristique, d'après lequel se fera remarquer aussi dans le fluide un changement d'état qui ne se rattache pas nécessairement à un changement actuel dans les positions ou les formes des corps.

2°. La seconde pression

$$(2) \qquad -q_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$$

étant donnée aussi par une fluxion, sans qu'on fasse varier avec le temps les paramètres a_g, b_g, c_g, d_g, ..., a_k, ..., nous la regarderons de même comme une *pression d'impulsion* ou *d'influence*, mais secondaire.

3°. La troisième pression partielle

$$-q_0 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_g} a_g' + \frac{\partial \varphi_1}{\partial b_g} b_g' + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_k} a_k' + \ldots\ldots \right)$$

correspond, au contraire, à une variation des mêmes paramètres a_g, b_g, c_g, d_g, ..., a_k, ... déterminant les positions et les formes des corps à chaque moment. En vertu de ces mouvements, externes et internes, les masses fluides qui touchent les surfaces se déplaceront. Et de cette façon, pourvu qu'on n'ait plus égard aux *changements* qui se préparent dans les mouvements, il résultera une nouvelle pression de fluxion partielle, pression qui ne se rapporte pas, comme dans les cas précédents, à *l'accélération* dans les mouvements divers, mais seulement aux *déplacements eux mêmes* qui se produisent. On aura donc une pression partielle qui, bien qu'elle appartienne à la pression de fluxion, présente une certaine analogie avec la pression d'énergie.

Mais il y a encore d'autres raisons d'établir une telle comparaison, au moyen de laquelle on aura une espèce de transition entre les deux classes de pression dans lesquelles se décompose la pression d'inertie. Si l'on considère les

$$a'_g, \; b'_g, \; \ldots, \; a'_k, \; \ldots$$

comme des vitesses, de différentes espèces, appartenant aux *corps* $S_g, \ldots, S_k, \ldots$ et

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}, \; \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_g}, \; \ldots, \; \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_k}, \; \ldots\ldots$$

comme des vitesses fictives et correspondantes, appartenant au *point* (x, y, z) *du fluide,* on reconnaîtra une analogie avec des expressions comme

$$-\frac{1}{2} q_0 (a'^2_g + b'^2_g + \ldots + a'^2_k + \ldots\ldots),$$

ou comme

$$-\frac{1}{2} q_0 V.$$

En composant la pression dont il s'agit avec la pression d'énergie qui précède, on aura, en effet, une expression de la forme

$$\text{(c)} \qquad -\frac{1}{2} q_0 \left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g} a'_g + \ldots \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} u + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} v + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} w\right) + \ldots + a'_g \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}\right].$$

Et ici le terme moyen et trinôme qui représente le carré de la vitesse, V, ne se présente naturellement qu'une seule fois, parce que les facteurs u, v, w coïncident en valeur respectivement avec $\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}$. Dans les autres termes cela n'est plus le cas; a'_g ne coïncide pas en valeur avec $\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}$ etc., et les termes dont il s'agit se présentent ainsi deux fois.

La pression partielle que nous traitons se comporte ainsi, pouvons-nous dire, comme une *pression d'énergie potentielle* ou, plus simplement, comme une *pression potentielle.* La pression d'énergie, que nous avons choisie pour terme de comparaison, et que nous désignerons brièvement par ce nom, sera alors plus exactement une »*pression d'énergie kinétique*«. Et la pression (c) sera une *pression d'énergie composée.*

Si l'on fixe l'attention sur le mot *énergie,* il faut se souvenir qu'on forme ici le demi-produit de deux vitesses différentes, l'une correspondant à un corps, l'autre (qui en outre est d'espèce fictive) correspondant au point du fluide. De plus, il faut toujours former deux produits identiques qui se correspondent, et l'on établira ensuite la série entière de ces produits doubles; enfin pour en obtenir la pression partielle que l'on cherche, on les ajoute les uns aux autres. Surtout lorsqu'on aura à considérer des points du fluide situés sur les surfaces des corps, la ressemblance entre la pression d'énergie potentielle et celle de l'énergie kinétique s'accentuera, et il s'en présentera des applications dans les problèmes spéciaux.

Si, d'un autre côté, on fixe l'attention sur le mot *potentielle* en tant qu'épithète au mot énergie, il faut se rappeler qu'on arrive à l'expression de la pression partielle que l'on considère en partant du *potentiel principal* qui se rapporte au mouvement, $q_0 \varphi_1$, et en faisant ensuite varier, négativement, les paramètres avec le temps.

VII.

Superpositions de potentiels. Cas simplifiants. Conclusions.

46. Nous examinerons de quelle manière on peut déterminer les fonctions φ_1 et φ_2 dont est composé le potentiel φ.

47. L'équation de continuité s'écrira

$$\Delta\varphi + \frac{1}{q}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial t}\right) = 0,$$

Δ désignant l'opération

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

En développant $\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial t}$, il faut cependant avoir égard aux termes et du

premier et du second ordre; en développant $\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x}$ etc., il suffira de tenir compte de ceux du premier. On aura donc

$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x},$$

etc., et

$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - \sigma_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial a_g} a'_g + \frac{\partial \sigma_1}{\partial b_g} b'_g + \ldots + \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_k} a'_k + \ldots\ldots\right).$$

Substituant et effectuant ensuite une séparation en deux équations (ce qui est permis parce que φ_1 et σ_1 ne contiennent pas de termes du second ordre), on arrive aux équations suivantes:

$$(1)\quad \begin{aligned} &\Delta \varphi_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = 0 \\ &\Delta \varphi_2 + \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \sigma_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\frac{\partial \sigma_1}{\partial z} \\ &\qquad - a'_g \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_g} - \ldots - a'_k \frac{\partial \sigma_1}{\partial a_k} - \ldots + \sigma_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}. \end{aligned}$$

Il faut y ajouter les conditions relativement aux surfaces des corps. En les considérant comme formant une seule surface donnée par l'équation

$$F = 0,$$

on aura

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Cependant, nous supposerons que F ne contienne pas le temps explicitement et ne dépende que de x, y, z et des paramètres a_g, b_g, ... a_k, ... De là il résulte que l'équation de condition se décompose aussi en deux:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial a_g} a'_g + \frac{\partial F}{\partial b_g} b'_g + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_k} a'_k + \ldots\ldots = 0 \\ &\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0; \end{aligned}$$

car dans la première équation il n'y a que des termes du premier ordre, dans la seconde il n'y a que des termes du second. Les équations subsistent, comme on le sait, pour tous les points des surfaces, c'est à dire tant que $F = 0$.

48. *Pour déterminer* φ_1, il faut maintenant combiner la première des équations (1) avec l'équation connue (n° 41)

$$a^2\sigma_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}; \tag{3'}$$

et l'on emploie aussi la première des équations de condition (2). En même temps, on a égard à l'état initial, et l'on demande que la vitesse s'annule à l'infini.

À côté de φ_1 on trouve encore σ_1. Et il est bon de remarquer *qu'on n'a besoin de connaître que le coefficient principal de la relation empirique*, $k\lambda$ ou a^2, c'est à dire le carré de la *vitesse de propagation*.

49. Il en est tout autrement lorsqu'il s'agit de φ_2 et de σ_2. Alors on aura recours à la seconde équation (1), combinée avec la seconde condition (2). Il faut y ajouter une équation correspondant à (3'), équation que l'on trouve en introduisant, dans l'expression hydrodynamique de la pression (n° 41), la valeur de celle-ci au moyen de la relation empirique (n° 40); puis on éliminera σ_1 au moyen de l'équation (3'). De cette façon l'on obtient

$$\begin{aligned} a^2\sigma_2 = &-\frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}a'_g + \frac{\partial\varphi_1}{\partial b_g}b'_g + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial a_k}a'_k + \ldots\ldots\right) \\ &-\frac{1}{2}\left(1 + a^2\frac{\nu}{\lambda}\right)V + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{3''}$$

φ_2 et σ_2 *ne peuvent donc être déterminés à moins qu'on ne connaisse les coefficients secondaires de la relation empirique.*

50. En général, il serait chose difficile d'achever la solution d'un problème où il faudrait avoir égard à tous les termes du second ordre; car il deviendrait nécessaire de déterminer aussi σ_2 et φ_2.

Mais il y a des problèmes spéciaux dont la solution n'exige pas qu'on tienne compte de tels termes.

Ou bien il peut arriver qu'il suffise d'en connaitre quelques-uns qui ne contiennent ni σ_2 ni φ_2.

51. Souvent il est suffisant de connaître la partie dominante ou de la vitesse ou de la pression, et l'on se borne alors à la *première approximation.*

Cela a lieu si l'on cherche seulement à déterminer, dans ses grands traits, l'état de vibration qui se communique au fluide; mais qu'on ne se soucie pas de déterminer à part les forces apparentes provenant des vibrations originaires et sollicitant les corps.

Figurons-nous aussi qu'après une série de vibrations uniformes il s'y produise des changements relativement considérables, ou imaginons-nous que ces vibrations commencent ou finissent très soudainement. Pour parvenir à une solution complète, on devrait ainsi introduire les coefficients *secondaires* de la relation empirique, pourvu que les difficultés à vaincre ne fussent pas encore plus grandes. Mais justement alors, pour reconnaître ce qui est le plus important quant aux phénomènes incidents, y comprises même les variations des pressions, il suffira ordinairement d'étudier ce qui se rapporte aux accélérations; et l'on s'en tiendra donc encore à la première approximation. Les difficultés s'éliminent ainsi, et l'on n'a besoin que du *coefficient principal* ou du carré de la *vitesse de propagation.*

On aura maintenant

$$p = p_0 - q_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t},$$

et c'est seulement φ_1 dont la connaissance est exigée.

52. En second lieu, nous prendrons en considération les quantités du *second ordre.* Les mouvements dans le fluide proviennent toujours des vibrations des corps. Mais celles-ci doivent être *assez régulières* pour qu'on puisse admettre que les *coefficients secondaires disparaissent.*

Nous admettons aussi qu'après la fin d'une vibration la place d'un corps ou d'une particule du fluide (si l'on compare leurs déplacements avec les amplitudes des vibrations) ne soit que faiblement changée.

Cela posé, nous nous proposons de déterminer la *pression moyenne,* dans un point *géométrique* du fluide, pendant le cours d'une période. Cette période est donc censée être commune pour tous les corps: en d'autres termes, les vibrations seront *synchrones.*

On peut alors faire abstraction de la *pression de fluxion,* dont la valeur moyenne s'annulle; et l'on partira de l'équation abrégée

$$p - p_0 = - q_0 \left(\frac{1}{2} V_1 - \frac{1}{2a^2} \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial t^2} \right) + \ldots$$

Les termes qui ne sont qu'indiqués seront d'un ordre trop élevé, ou bien leurs moyennes sont nulles. Différemment pour un point qui *se déplace.*

Si d'un autre côté il s'agit de déterminer les *forces moyennes* qui imprimeront aux corps de nouveaux mouvements progressifs, il est seulement permis de supprimer la *pression d'influence secondaire*

$$- q_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial t},$$

qui donnerait lieu à une force du deuxième ordre, mais d'une espèce périodique. Et l'on peut écrire la pression dynamique $p - p_0$ comme il suit

$$p - p_0 = - q_0 \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_g} a'_g + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_k} a'_k + \ldots \ldots \right) + \frac{1}{2} V_1 - \frac{1}{2a^2} \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial t^2} \right].$$

Dans les deux cas, il ne sera ainsi nécessaire de connaître que le potentiel principal φ_1.

C'est à dire que *l'on aura seulement recours aux équations simples*

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta \varphi_1 + \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial t} = 0 \\[2ex] a^2 \sigma_1 = - \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter les conditions relativement aux surfaces, à l'état à l'infini, et à l'état initial.

Dans ce qui suit, nous nous bornons à examiner les problèmes des deux dernières espèces.

53. φ_1 était une quantité du premier ordre; car dans tous les points du fluide la vitesse s'annulerait avec une certaine quantité de cet ordre ε. Nous concevrons cette quantité ε comme le rapport entre la plus grande amplitude des vibrations des corps et les dimensions de ceux-ci. Et si ε diminue suffisamment, tandis que toutes les autres quantités se conservent,

même les mouvements progressifs auxquels donnent lieu les vibrations originaires ne varieront que faiblement.

La pression d'énergie composée

$$-q_0\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_g}a'_g+\frac{\partial\varphi_1}{\partial b_g}b'_g+\dots+\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_k}a'_k+\dots\dots+\frac{1}{2}V_1\right)$$

aussi bien que la *pression de propagation*

$$q_0\frac{1}{2a^2}\frac{\partial\varphi_1^2}{\partial t^2}$$

étant donc, toutes les deux, du second ordre, il en est de même de leurs valeurs moyennes aux surfaces des corps.

Ordinairement, ces deux espèces de pressions exerceront ainsi une influence l'une comparable à l'autre.

54. Nous allons maintenant varier aussi, mais toujours en passant de problème à problème, un second élément. C'est la vitesse avec laquelle les vibrations se succèdent. Ou autrement dit, c'est la *hauteur du son.* Alors c'est surtout le potentiel d'influence $\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}$ qui changera bien sensiblement. Et l'on arrive au résultat suivant:

Plus les périodes seront courtes et plus, par conséquent, la longueur des ondes sera petite, d'autant plus grande devient l'influence de la pression de propagation.

Cela a un intérêt particulier quand il s'agit d'étudier les forces qui prennent naissance lorsqu'on passe du fluide incompressible au fluide élastique, et qu'on s'arrange en sorte que les ondes deviennent de plus en plus petites. Car, nous le rappelons, la pression partielle dont il est question est toujours *positive,* tandis que la pression d'énergie, à laquelle s'ajoute une pression potentielle d'un signe indéterminé, est toujours *négative.*

55. D'autre part, augmentons la durée des périodes, de sorte qu'on obtienne des *ondes d'une longueur de plus en plus grande, relativement à la distance des corps au point que l'on considère.* Alors, tant qu'on se borne à considérer ce même point qui, à la fin, appartiendra au commencement de la première onde, on s'approchera successivement de l'état qui dans les mêmes circonstances convient à un liquide.

Car si l'on ne fait pas varier la position du point, et qu'on prolonge toujours la durée des périodes des vibrations pour obtenir des

ondes de la longueur voulue, il faut concevoir le potentiel d'influence $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$ comme une quantité d'un ordre inférieur à celui du potentiel φ_1 lui même. Or des deux équations (2) du n° 52, on conclut que

$$a^2 \Delta \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_1^2}{\partial t^2}.$$

Et puisque ensuite a^2 est une constante déterminée, il en résulte que la partie dominante de φ_1 se déterminera par l'équation différentielle simplifiée

$$\Delta \varphi_1 = 0.$$

Les autres parties de la même fonction tendent vers zéro.

On peut donc calculer le potentiel de vitesse comme s'il s'agissait d'un liquide. Et l'on peut aussi faire la même simplification pour déterminer la valeur de la pression, puisque, dans ce cas, la pression de propagation doit être négligée par rapport aux autres pressions partielles comme étant d'un ordre inférieur.

56. *Donc pour des vibrations assez lentes, et lorsqu'il s'agit des points qui ne se trouvent pas à de trop grandes distances des corps vibrants, le fluide se comporte comme un fluide incompressible.* Et les *forces* qui se développent entre les corps sont donc *essentiellement les mêmes que si elles avaient été calculées pour un liquide.* La pression d'inertie aura à peu près la même valeur que pour un liquide et la pression de propagation, qui a un caractère presque opposé, tend à disparaître.

Mais il n'en est pas ainsi quand on *sépare* suffisamment les corps, en gardant leurs vibrations; ou bien, si l'on fait assez *raccourcir* les périodes. Chaque corps ne se trouve plus au commencement de la première onde que produit un autre. La pression d'inertie se modifie alors, et elle peut changer essentiellement, même en prenant sa valeur moyenne, avec l'état des ondes. La pression de propagation, d'un autre côté, gagnera de l'influence, et pourrait devenir prédominante.

Pour imiter dans l'air les phénomènes relatifs aux liquides, il ne faut pas nécessairement aller aux limites extrêmes. En effet, la vitesse de propagation est très grande par rapport à celle des vibrations ordinaires (p. ex. dans le cas des sons perceptibles), et les objets vibrants dont on pourrait examiner avec succès l'action mutuelle sont aussi le plus souvent

bien rapprochés l'un de l'autre; par conséquent, les phénomènes de force qu'on reconnaîtra d'après des expériences faites dans l'eau, se montreront alors dans l'air très clairement et de la même manière.

Il en pourrait être tout autrement à de grandes distances, et pour des vibrations correspondant à des sons très élevées.

57. Avant de finir, nous donnerons, pour plus de clarté et d'utilité, au théorème que nous venons d'exposer un peu plus de développement et d'extension.

Nous étudierons ainsi, successivement, la forme du potentiel qui se rattache aux suppositions que nous avons prises pour point de départ, la simplification qui en résultera pour l'équation de continuité, et la manière dont se décompose l'équation de condition relativement aux surfaces des corps. Nous ferons ensuite apercevoir quelles en seront les conséquences quand il s'agira de chercher la valeur approchée du potentiel et celle de la pression, surtout celle de la pression moyenne.

58. Nous prolongerons, comme il a été dit, de plus en plus la durée des périodes des vibrations, et en même temps nous ferons tendre vers zéro le rapport ε entre la plus grande amplitude et les dimensions des corps. Il y aura ainsi une double raison pour l'affaiblissement de l'intensité des vibrations; et le rapport de cette intensité (c'est à dire la plus grande vitesse dans le mouvement vibratoire) à la vitesse de propagation (qui a une valeur déterminée) doit donc être considéré comme une quantité infiniment petite du second ordre.

En vertu de cela, nous développerons le potentiel de vitesse en une somme de potentiels partiels, comme suit:

(1) $$\varphi = \varepsilon^2 a\psi + \varepsilon^3 a\chi + \varepsilon^4 a\omega + \ldots\ldots$$

ψ, χ, ω sont des fonctions périodiques dépendant d'un argument

$$i\varepsilon at;$$

et il en résulte ainsi d'abord que $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ est une quantité de *troisième* ordre tandis que φ comme aussi a'_g, b'_g, ..., a'_k, ..., sont de deuxième ordre.

59. On observera maintenant que dans l'expression hydrodynamique de la pression (n° 41) la partie dominante de $p - p_0$ est toujours la pression d'influence. Cette pression partielle est en effet du troisième

ordre comme $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. La pression d'énergie composée est au contraire du quatrième ordre, et la pression de propagation même du sixième.

On aura donc, comme ailleurs, en n'ayant égard qu'au terme principal du développement:

$$p - p_0 = - q_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Et au moyen de l'équation empirique, on retrouvera

$$\text{(a)} \qquad a^2\sigma = - \frac{\partial\varphi}{\partial t};$$

d'où il suit que la condensation sera une quantité du *troisième* ordre.

Maintenant revenons aussi à l'équation de continuité (n° 47), et voyons de quelle manière elle se simplifiera dans ces nouvelles circonstances. σ étant du troisième ordre, $\frac{\partial\sigma}{\partial t}$ par suite du quatrième, et a'_j etc. du deuxième ordre, on reconnait que cette équation se réduira à la forme simple

$$\text{(b)} \qquad \Delta\varphi + \frac{\partial\sigma}{\partial t} = 0,$$

pourvu toutefois que les termes du cinquième ordre soient négligés.

Des deux équations (a) et (b), que nous venons de retrouver, on conclura que sous les suppositions faites plus haut on aura

$$\text{(ab)} \qquad a^2\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

60. Il faut donc substituer ici la valeur de φ en l'exprimant par *trois* termes, par ceux du deuxième, du troisième et du quatrième ordre. Car dans l'équation (ab) le membre à gauche est du deuxième ordre et celui à droite du quatrième.

On posera donc

$$(1) \qquad \varphi = \varepsilon^2 a\psi + \varepsilon^3 a\chi + \varepsilon^4 a\omega,$$

où ψ, χ, ω doivent satisfaire aux équations différentielles

$$(2) \qquad \Delta\psi = 0, \qquad \Delta\chi = 0, \qquad \varepsilon^2 a^2 \Delta\omega = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

En écrivant plus simplement

$$\Phi = \varepsilon^2 a\psi, \quad \Phi_1 = \varepsilon^3 a\chi, \quad \Phi_2 = \varepsilon^4 a\omega$$

de sorte qu'on a

(1′) $$\varphi = \Phi + \Phi_1 + \Phi_2,$$

on aura

(2′) $$\Delta\Phi = 0, \quad \Delta\Phi_1 = 0, \quad a^2\Delta\Phi_2 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}.$$

61. L'équation de condition relativement aux surfaces se décompose en même temps en trois équations

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial a_{,,}}a'_{,,} + \frac{\partial F}{\partial b_{,,}}b'_{,,} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_{\iota}}a'_{\iota} + \ldots = 0$$

(3) $$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial\Phi_2}{\partial z} = 0;$$

et ces équations subsistent pour tous les points des surfaces, c'est à dire tant que $F = 0$.

62. On déterminera donc les valeurs de Φ, Φ_1, Φ_2 au moyen des équations différentielles (2′) et les conditions relatives aux surfaces; et l'on trouvera ainsi la valeur cherchée de φ (1′).

On voit de plus que Φ et Φ_1 satisfont à l'équation de Laplace

$$\Delta = 0,$$

comme s'il s'agissait d'une question sur les liquides. Et nous ferons particulièrement remarquer que la valeur de Φ_1 est égale à zéro, ou, si elle en diffère, elle dépend dans tous les cas uniquement du temps.

Φ_2 satisfait à l'équation differentielle

$$\Delta\Delta = 0.$$

Et ordinairement cette fonction doit avoir un caractère binaire pour pouvoir satisfaire aussi à l'équation de condition. L'un des deux termes sera alors une intégrale de l'équation de Laplace.

63. On observera encore que les mouvements vibratoires qui se développent dans le fluide ne sont pas, de cette façon, déterminés d'une

manière assez correcte à moins que le point que l'on considère ne se trouve au commencement de la première onde.

Mais si la vitesse de propagation, a, a une valeur assez grande, rien n'empêche que l'espace au dedans duquel les mouvements du fluide doivent être étudiés et où nous supposons que tous les corps vibrants se trouvent, puisse avoir une étendue aussi grande que l'on veut, en même temps que les vitesses qui se produisent pourront acquérir une intensité quelconque. La durée des périodes pourra être choisie extrêmement courte, bien que les amplitudes restent toujours excessivement petites par rapport aux dimensions des corps.

64. Si maintenant on se borne à chercher *la partie dominante de la pression,* afin d'étudier le caractère vibratoire de la pression elle même, on peut s'arréter à la première approximation, et l'on se servira alors de l'équation

$$p - p_0 = - q_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

La question est donc la même que si l'on se l'était posée relativement à un liquide.

65. Si, au contraire, on cherche *la valeur moyenne de la pression* dynamique $p - p_0$, pour un point géométrique, on peut faire abstraction de la pression de fluxion, qui s'exprime comme une dérivée totale par rapport au temps. On partira donc d'une équation abrégée où se trouvent seulement la pression d'énergie kinétique et la pression de propagation. La première de celles-ci est du quatrième ordre, la seconde du sixième.

En y introduisant maintenant la valeur de φ, le potentiel partiel Φ_1, qui ne dépend que du temps et qui en même temps est du troisième ordre, ne jouera aucun rôle: on peut écrire simplement

$$p - p_0 = \ldots - \frac{1}{2} q_0 \left(\frac{\partial \Phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial z^2} \right)$$
$$- q_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) + \frac{q}{2a^2} \frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2}.$$

Dans le membre à droite, les termes écrits dans la première ligne sont du quatrième ordre, ceux de la seconde du sixième. Tous les termes sont aussi proportionnels à a^2; d'où il suit qu'en choisissant a assez grand, on peut obtenir des pressions aussi fortes que l'on désire, quoiqu'on se

soit arrêté à un point où l'on avait attribué à ε une valeur fixe extrêmement petite.

L'expression précédente se simplifie lorsqu'on met les termes du sixième ordre hors de considération. Tout se passe alors comme s'il s'agissait d'un liquide. — On arrive au même résultat si l'on fait tendre a vers l'infini, mais en sorte que $\varepsilon^2 a$ garde une valeur déterminée. Car alors Φ_2 s'annulle et il en est aussi de même avec la pression de propagation à cause du facteur $\frac{1}{a^2}$.

66. Au lieu de chercher la pression moyenne, on pourrait se proposer de déterminer *la force moyenne*, sollicitant un quelconque des corps, en raison des pressions qu'ils éprouvent pendant une période de vibration.

Alors il ne sera pas permis, en général, de partir de l'expression de la pression moyenne. Il ne faut pas exclure la pression de fluxion. Mais on aura une simplification d'une autre espèce en tant qu'on peut faire abstraction du potentiel partiel Φ_1 qui ne dépend que du temps, soit d'ailleurs que le temps y entre explicitement ou non. À cause de cela et puisqu'on doit rejeter tous les termes dont l'ordre est plus grand que le sixième, Φ_1 ne peut se présenter que dans la pression de fluxion. Et puisqu'ainsi il donne seulement lieu à des pressions partielles qui ne varient pas d'un point à un autre, il sera sans aucun effet pour produire de nouveaux mouvements.

L'équation abrégée de la pression dynamique $p - p_0$ s'écrira donc maintenant de la manière suivante, sans faire y entrer Φ_1:

$$p - p_0 = - q_0 \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_y} a'_y + \dots \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi^2}{\partial z} \right) \right]$$

$$- q_0 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial a_y} a'_y + \dots \right) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2a^2} \frac{\partial \Phi^2}{\partial t^2} \right] + \dots$$

On réduit particulièrement au cas des liquides si on met hors de considération les termes de la seconde parenthèse, qui sont du sixième ordre.

Christiania, Juillet 1883.

SUR LA GÉNÉRALISATION
D'UNE FORMULE D'ABEL

PAR

N. SONINE
À VARSOVIE.

La formule dont il s'agit se rapporte au calcul inverse des intégrales définies; elle a été deux fois établie par ABEL et présentée sous deux formes équivalentes: [1]

$$(1) \qquad \phi(a) = \int_{x=0}^{x=a} \frac{ds}{(a-x)^n}, \qquad s = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^1 \frac{\phi(xt) \, . \, dt}{(1-t)^{1-n}};$$

$$(2) \qquad f(x) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^x \frac{da}{(x-a)^{1-n}} \int_0^a \frac{f'(z) \, . \, dz}{(a-z)^n}.$$

La généralisation que nous allons présenter de cette formule peut être effectuée de la manière suivante.

Considérons l'intégrale

$$\omega = \int_a^x f(\xi) \, . \, d\xi$$

et multiplions la fonction $f(\xi)$ par l'unité représentée par une intégrale

[1] Voir les N°s II et IX de la nouvelle édition des Oeuvres complètes d'ABEL.

définie contenant x, ξ. Par un choix convenable de variable on peut toujours réduire ce multiplicateur à la forme

$$(3) \qquad 1 = \int_{\xi}^{x} \varphi(\lambda, \xi, x) d\lambda$$

et alors on pourra écrire, en vertu d'une formule élementaire,

$$(4) \qquad \omega = \int_{a}^{x} f(\xi) \cdot d\xi \int_{\xi}^{x} \varphi(\lambda, \xi, x) d\lambda = \int_{a}^{x} d\lambda \int_{a}^{\lambda} f(\xi) \cdot \varphi(\lambda, \xi, x) d\xi.$$

Telle est l'expression la plus générale de l'intégrale ω par une intégrale double. En comparant cette formule à la formule (2) on est conduit à supposer:

$$\varphi(\lambda, \xi, x) = \sigma(\lambda - \xi) \cdot \psi(x - \lambda),$$

les fonctions σ, ψ devant être déterminées au moyen de la condition (3), qui devient

$$1 = \int_{\xi}^{x} \sigma(\lambda - \xi) \cdot \psi(x - \lambda) \cdot d\lambda,$$

ou, en posant $\lambda = \xi + (x - \xi)\mu$ et désignant $x - \xi$ par z,

$$(5) \qquad 1 = z \int_{0}^{1} \sigma(z\mu) \psi(z - z\mu) d\mu.$$

Pour que cette égalité puisse avoir lieu en faisant $z = 0$ il faut nécessairement admettre que le produit $\sigma(x) \cdot \psi(x)$ soit infini du premier ordre pour $x = 0$; la convergence de l'intégrale aux limites exige en outre que les fonctions $\sigma(x)$, $\psi(x)$ pour $x = 0$ ne soient infinies que d'un ordre inférieur à l'unité. On peut donc poser

$$\sigma(x) = x^{-p}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots), \qquad 0 < p < 1,$$

$$\psi(x) = x^{-q}(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots), \qquad 0 < q < 1,$$

$$p + q = 1.$$

L'égalité (5) devient par la substitution de ces valeurs

$$\mathrm{I} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} z^{m+n} a_m b_n \int_0^1 \mu^{m-p}(\mathrm{I} - \mu)^{n-q} . d\mu,$$

ou

$$\mathrm{I} = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^{m+n}}{\Pi(m+n)} a_m \Pi(m-p) b_n \Pi(n-q).$$

En posant $a_m \Pi(m-p) = c_m$, $b_n \Pi(n-q) = d_n$, on trouve de là

$$c_0 d_0 = \mathrm{I},$$

$$c_m d_0 + c_{m-1} d_1 + \ldots + c_1 d_{m-1} + c_0 d_m = 0, \qquad m > 0.$$

Ces conditions font voir qu'on peut supposer: $c_0 = d_0 = \mathrm{I}$ et qu'alors on doit avoir pour y arbitraire

$$(\mathrm{I} + c_1 y + c_2 y^2 + \ldots)(\mathrm{I} + d_1 y + d_2 y^2 + \ldots) = \mathrm{I}.$$

Nous parvenons ainsi au résultat définitif suivant: Ayant choisi deux nombres positifs p et q dont la somme est égale à l'unité, prenons une série quelconque

$$\mathrm{I} + c_1 y + c_2 y^2 + \ldots = \varphi(y)$$

et formons le développement

$$\frac{\mathrm{I}}{\varphi(y)} = \mathrm{I} + d_1 y + d_2 y^2 + \ldots;$$

alors on aura

$$(6) \quad \sigma(x) = x^{-p}\left(\frac{\mathrm{I}}{\Pi(-p)} + \frac{c_1 xy}{\Pi(\mathrm{I}-p)} + \frac{c_2 x^2 y^2}{\Pi(2-p)} + \ldots\right) = x^{-p} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{c_m x^m y^m}{\Pi(m-p)},$$

$$(7) \quad \psi(x) = x^{-q}\left(\frac{\mathrm{I}}{\Pi(-q)} + \frac{d_1 xy}{\Pi(\mathrm{I}-q)} + \frac{d_2 x^2 y^2}{\Pi(2-q)} + \ldots\right) = x^{-q} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{d_n x^n y^n}{\Pi(n-q)},$$

$$(8) \qquad \int_a^x f(\xi) . d\xi = \int_a^x \psi(x-\lambda) . d\lambda \int_a^\lambda f(\xi) . \sigma(\lambda - \xi) . d\xi.$$

Nous avons obtenu cette généralisation de la formule d'Abel, il y a déjà plus de deux ans, par une méthode différente dans une recherche qui n'est pas encore publiée. Le changement de l'ordre des intégrations effectué dans la formule (4) a été appliqué pour la démonstration de la formule d'Abel par M. Joachimsthal, en 1860 (1), et par M. Létnikoff, en 1874 (2).

Soit maintenant

$$\varphi(y) = e^y, \qquad \frac{1}{\varphi(y)} = e^{-y}, \qquad c_n = \frac{1}{\Pi(n)}, \qquad d_n = \frac{(-1)^n}{\Pi(n)};$$

nous avons alors:

$$\sigma(x) = x^{-p} \sum_0^{\infty} \frac{(xy)^n}{\Pi(n) \,.\, \Pi(n-p)}, \qquad \psi(x) = x^{-q} \sum_0^{\infty} \frac{(-xy)^n}{\Pi(n) \,.\, \Pi(n-q)},$$

et ces deux fonctions s'expriment aisément par les fonctions cylindriques à savoir

$$\sigma(x) = (2x)^{-p} \frac{J^{-p}(2i\sqrt{yx})}{(2i\sqrt{yx})^{-p}}, \qquad \psi(x) = (2x)^{-q} \frac{J^{-q}(2\sqrt{yx})}{(2\sqrt{yx})^{-q}};$$

en particulier pour $p = q = \frac{1}{2}$ on aura

$$\sigma(x) = \frac{\cos(2i\sqrt{yx})}{\sqrt{\pi x}}, \qquad \psi(x) = \frac{\cos(2\sqrt{yx})}{\sqrt{\pi x}}.$$

Soit encore $\varphi(y) = (1+y)^{-r}$, $\frac{1}{\varphi(y)} = (1+y)^r$,

$$c_n = (-1)^n \frac{r(r+1)\dots(r+n-1)}{\Pi(n)}, \qquad d_n = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{\Pi(n)};$$

---

(1) Joachimsthal: *Ueber ein Attractionsproblem.* Crelle's Journal, T. 58, p. 135.

(2) А. В. Лѣтниковъ: Изслѣдованія относящіяся къ теоріи интеграловъ вида: $\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)du$. — Математическій сборникъ, издаваемый Московскимъ Математическимъ Обществомъ, Т. VII (1874), р. 1—206.

nous obtiendrons:

$$\sigma(x) = x^{-p} \sum_{0}^{\infty} \frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{\Pi(n)\,.\,\Pi(n-p)} (-yx)^n = \rho(x, p, r),$$

$$\psi(x) = x^{-q} \sum_{0}^{\infty} \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{\Pi(n)\,.\,\Pi(n-q)} (yx)^n = \rho(x, q, -r);$$

et pour $r = q = 1 - p$ on aura

$$\sigma(x) = \frac{x^{-p}}{\Pi(-p)} e^{-yx}, \qquad \psi(x) = \frac{1}{\Pi(-q-1)} \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-yx}\,dx}{x^{1+q}}, \text{ etc.}$$

Supposons que les coefficients c_m, d_n ne dépendent pas de p, q et considérons les fonctions (6) et (7) en omettant complètement les restrictions imposées à p, q; pour mettre en évidence leur dépendance de p, q nous les désignerons $\sigma_{-p}(x)$, $\psi_{-q}(x)$. Si l'on considère maintenant l'intégrale $\int_{\xi}^{x} \sigma_r(\lambda - \xi)\,.\,\psi_s(x - \lambda)\,d\lambda$ qui se transforme en $z\int_0^1 \sigma_r(z\mu)\,.\,\psi_s(z - z\mu)\,d\mu$, on remarque tout de suite qu'en vertu des relations qui existent entre les coefficients c et d, cette intégrale se réduit à un seul terme

$$\frac{z^{1+r+s}}{\Pi(r)\,.\,\Pi(s)} \int_0^1 \mu^r (1-\mu)^s\,.\,d\mu = \frac{(x-\xi)^{1+r+s}}{\Pi(1+r+s)},$$

où l'on suppose naturellement $r > -1$, $s > -1$. Ainsi on peut écrire

$$(9) \qquad \int_a^x f(\xi)\,.\,\frac{(x-\xi)^{1+r+s}}{\Pi(1+r+s)} = \int_a^x \psi_s(x-\lambda)\,.\,d\lambda \int_a^{\lambda} f(\xi)\,.\,\sigma_r(\lambda - \xi)\,.\,d\xi.$$

Soit enfin

$$C_0 + C_1 y + C_2 y^2 + \ldots = (A + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots)(B + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots),$$

en sorte que $C_n = A_n B_0 + A_{n-1} B_1 + \ldots + A_1 B_{n-1} + A_0 B_n$. Posant

(10) $$\Sigma_s(x) = x^s \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n (yx)^n}{\Pi(n+s)},$$

(11) $$\Psi_r(x) = x^r \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{B_n (yx)^n}{\Pi(n+r)},$$

(12) $$\Phi_t(x) = x^t \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{C_n (yx)^n}{\Pi(n+t)},$$

on trouve pour $r > -1$, $s > -1$,

$$\Phi_{r+s+1}(x-\xi) = z\int_0^1 \Sigma_s(z\mu)\,\Psi_r(z - z\mu)\,.\,d\mu = \int_\xi^x \Sigma_s(\lambda - \xi)\,.\,\Psi_r(x-\lambda)\,.\,d\lambda;$$

donc

(13) $$\int_a^x f(\xi)\,.\,\Phi_{r+s+1}(x-\xi)\,d\xi = \int_a^x \Psi_r(x-\lambda)\,d\lambda\,.\int_a^\lambda f(\xi)\,.\,\Sigma_s(\lambda-\xi)\,.\,d\xi.$$

Remarquons en terminant que les cinq fonctions $\sigma_s(x)$, $\varphi_s(x)$, $\Sigma_s(x)$, $\Psi_s(x)$, $\Phi_s(x)$ possèdent la propriété exprimée par l'égalité

(14) $$\frac{du_s(x)}{dx} = u_{s-1}(x),$$

et que cette propriété appartient aussi aux fonctions

$$v_s = \int_a^x f(\xi)\,.\,u_s(x-\xi)\,.\,d\xi.$$

Varsovie, le 20 Juin 1883.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE LAGE DER BRENNLINIEN EINES UNENDLICH DÜNNEN STRAHLENBÜNDELS GEGENEINANDER UND GEGEN EINEN HAUPTSTRAHL

VON

LUDWIG MATTHIESSEN

in ROSTOCK.

Unter einer Brennlinie eines Strahlenbündels versteht man im Allgemeinen eine Gerade, welche sämtliche Strahlen des Bündels schneidet. Im Besonderen findet dieser Begriff Anwendung auf unendlich dünne Strahlenbündel, wenn es sich um die Betrachtung der Umhüllungsfläche sämtlicher Normalen eines unendlich kleinen Elements einer krummen Oberfläche oder der Form eines in einer continuirlich gekrümmten Fläche gebrochenen homocentrischen optischen Strahlenbündels handelt. STURM und KUMMER haben das Theorem aufgestellt, dass immer entweder zwei reelle oder zwei complexe Brennlinien existiren und dass dieselben senkrecht auf dem Hauptstrahle des Bündels stehen. Neuerdings ist mehrfach darauf hingewiesen, dass dies Theorem streng keine allgemeine Gültigkeit haben könne, da schon von REUSCH (POGG. Ann. Bd. 130, S. 497 [1867]) gezeigt worden sei, dass, wenn man die Form eines an einer sphärischen Fläche gebrochenen oder gespiegelten homocentrischen Strahlenbündels betrachtet, man eine zur Axe des Bündels schiefe Brennlinie erhält. ZECH zieht hieraus (SCHLÖMILCH, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 24 S. 168 [1879]) die Vermuthung, dass drei Strahlen zur Bestimmung der Brennlinien eines dünnen Strahlenbündels nicht genügen, weil auch noch der Winkel derselben mit der Axe zu bestimmen übrig bleibe. Er untersucht deshalb

ein Strahlenbündel, welches durch seine Axe und irgend zwei diese Axe schneidende Gerade als Brennlinien bestimmt ist, wenn noch eine unendlich kleine geschlossene Kurve, deren Mittelpunct auf der Axe liegt, als Leitlinie gegeben ist. Zech bemerkt mit Bezugnahme auf Steiner's Untersuchungen (*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit* u. s. w. S. 253) dass Strahlenfächer, die auf einem einfachen Hyperboloide liegen, beliebig viele Brennlinien haben können und ferner, dass, wenn die Leitlinie ein Kegelschnitt ist, die zu zwei Brennlinien gehörige Kegelfläche so wie jeder Schnitt derselben mit einer beliebigen Ebene vom vierten Grade sei. Hieraus folgt, dass unendlich dünne Strahlenbündel Brennlinien haben, welche mit dem Hauptstrahle im Allgemeinen beliebige spitze Winkel bilden. In einer späteren Abhandlung (Sitzungsber. d. math. u. phys. Kl. d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 1883, H. 1) ist von mir gezeigt worden, wie man den Ort und die Lage der Brennlinien eines dünnen Strahlenbündels berechnen kann, welches von sämtlichen Normalen eines unendlich kleinen Elements einer krummen Oberfläche z. B. der Malus'schen Wellenfläche eines gebrochenen optischen Strahlenbündels gebildet wird. Für ein compactes Strahlenbündels d. h. ein solches, welches aus lauter Strahlenfächern zusammengeschichtet ist, existiren im Allgemeinen immer nur zwei Brennlinien, welche sich in folgender Weise geometrisch characterisiren lassen. Jede krumme Fläche hat im Allgemeinen zwei Krümmungsmittelpunctsflächen, die in jeder Normale auf einander senkrecht stehen, also Orthogonalflächen sind. Die durch die beiden Hauptnormalschnitte und die Normale eines Flächenelements bestimmten Ebenen nennt Kummer die Focalebenen; die I. Focalebene tangirt die II. Krümmungsmittelpunctsfläche in der II. Brennlinie; die II. Focalebene tangirt die I. Krümmungsmittelpunctsfläche in der I. Brennlinie. Die I. Focalebene trifft die I. Brennlinie im I. Brennpuncte und ebenso trifft die II. Focalebene die II. Brennlinie im II. Brennpuncte. Die Schnittlinie der beiden Focalebenen ist der Hauptstrahl oder die Axe des Strahlenbündels. Es ist ferner bekannt, dass der geometrische Ort der Krümmungsmittelpuncte eines jeden der beiden Hauptnormalschnitte den Namen »Rückkehrkante» führt. Man kann also auch sagen: die I. Focalebene tangirt den geometrischen Ort aller Rückkehrkanten der nebeneinanderliegenden II. Hauptnormalschnitte eines Flächenelementes in der II. Brennlinie; die II. Focalebene tangirt den geometrischen Ort aller Rückkehrkanten der

nebeneinanderliegenden I. Hauptnormalschnitte in der I. Brennlinie. Es ergibt sich nun unmittelbar aus diesen Thatsachen, dass zwar die Brennlinien in zwei aufeinander senkrechten Ebenen, den beiden Focalebenen liegen, damit aber keineswegs die Neigung der Brennlinien gegen den Hauptstrahl bestimmt ist, und hierin liegt eben die irrige Anschauung Sturm's von der tetraedrischen Gestaltung eines astigmatischen Strahlenbündels, indem er annimmt oder vielmehr den Beweis führt, es sei diese Neigung eine senkrechte. Es gilt dies Theorem nur für einige specielle Fälle z. B. für den Scheitel eines dreiaxigen Ellipsoides.

Die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung soll die sein, zu zeigen, dass man zur vollständigen Bestimmung des Ortes und der relativen Lage der beiden Brennlinien eines beliebigen, auch endlichen Strahlenbündels mindestens vier Strahlen kennen muss und dass alle übrigen Strahlen gewisse Bedingungen erfüllen müssen, um zu denselben Brennlinien zu gehören.

Wir gehen aus von der Betrachtung beliebiger Strahlen im Raume und beziehen ihre Gleichungen auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem. Zur Bestimmung der Constanten einer Brennlinie betrachten wir die Coordinaten ihrer Schnittpunkte mit sämtlichen Strahlen als Unbekannte. Sind n Strahlen gegeben, so lassen sich $4n$ Gleichungen mit $3n + 4$ Unbekannten aufstellen. Dieselben sind also nur dann bestimmt, wenn $n = 4$ ist. Wir haben demnach folgende sechszehn Gleichungen nach x, y, z aufzulösen:

a, die Gleichungen der Strahlen:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + a_1 z_1 + \alpha_1 = 0, \\ y_1 + b_1 z_1 + \beta_1 = 0; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x_2 + a_2 z_2 + \alpha_2 = 0, \\ y_2 + b_2 z_2 + \beta_2 = 0; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3 + a_3 z_3 + \alpha_3 = 0, \\ y_3 + b_3 z_3 + \beta_3 = 0; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x_4 + a_4 z_4 + \alpha_4 = 0, \\ y_4 + b_4 z_4 + \beta_4 = 0. \end{array}\right.$$

b, die Gleichungen der Brennlinien:

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + a z_1 + \alpha = 0, \\ y_1 + b z_1 + \beta = 0; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x_2 + a z_2 + \alpha = 0, \\ y_2 + b z_2 + \beta = 0; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x_3 + a z_3 + \alpha = 0, \\ y_3 + b z_3 + \beta = 0; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x_4 + a z_4 + \alpha = 0, \\ y_4 + b z_4 + \beta = 0. \end{array}\right.$$

Damit diese Gleichungen zusammenbestehen, ist erforderlich, dass sei

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & b_1 & \beta_1 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_2 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & b_2 & \beta_2 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_3 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & b_3 & \beta_3 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a_4 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & b_4 & \beta_4 \\ 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Daraus resultirt folgendes System von Bestimmungsgleichungen für a, α, b, β:

$$\begin{vmatrix} a - a_1 & \alpha - \alpha_1 \\ b - b_1 & \beta - \beta_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - a_2 & \alpha - \alpha_2 \\ b - b_2 & \beta - \beta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a - a_3 & \alpha - \alpha_3 \\ b - b_3 & \beta - \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - a_4 & \alpha - \alpha_4 \\ b - b_4 & \beta - \beta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Elimination von $a\beta - \alpha b$ erhält man folgendes System von linearen Gleichungen bezüglich a, β, α und b:

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_1 - \alpha_2 \\ b & \beta_1 - \beta_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - a_2 \\ \beta & b_1 - b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ b_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & \alpha_2 \\ b_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_1 - \alpha_3 \\ b & \beta_1 - \beta_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - a_3 \\ \beta & b_1 - b_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ b_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & \alpha_3 \\ b_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_1 - \alpha_4 \\ b & \beta_1 - \beta_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & a_1 - a_4 \\ \beta & b_1 - b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ b_1 & \beta_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_4 & \alpha_4 \\ b_4 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen lassen sich kürzer schreiben durch

$$A_1 a + B_1 b + 1 = 0,$$

$$A_2 a + B_2 \alpha + 1 = 0,$$

$$A_3 a + B_3 \beta + 1 = 0.$$

Das vollständige System führt demnach auf eine quadratische Gleichung

$$M_1 a^2 + N_1 a + P_1 = 0.$$

Daraus ergeben sich die conjugirten Wurzelwerthe:

$$a = m_1 \pm n_1, \qquad b = m_3 \pm n_3,$$

$$\alpha = m_2 \pm n_2, \qquad \beta = m_4 \pm n_4.$$

Das Strahlensystem hat also entweder zwei reelle oder zwei complexe Brennlinien; dieselben sind im Allgemeinen zwei unter einem beliebigen Winkel sich kreuzende Gerade und ihre Gleichungen:

$$\begin{cases} x + (m_1 + n_1)z + (m_2 + n_2) = 0, \\ y + (m_3 + n_3)z + (m_4 + n_4) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + (m_1 - n_1)z + (m_2 - n_2) = 0, \\ y + (m_3 - n_3)z + (m_4 - n_4) = 0. \end{cases}$$

Die Bedingung ihres Senkrechtstehens würde lauten

$$m_1^2 - n_1^2 + m_3^2 - n_3^2 + 1 = 0.$$

Für den Fall imaginärer Werthe von n_1 und n_3 würden die Brennlinien unmöglich sein und folgeweise auch einen complexen Winkel mit einander und mit den Strahlen bilden müssen. Die Oerter der acht Brennpuncte findet man durch Auflösung des Gleichungensystemes:

$$x_i + a_i z_i + \alpha_i = 0,$$

$$y_i + b_i z_i + \beta_i = 0,$$

$$x_i + a z_i + \alpha = 0,$$

indem man i von 1 bis 4 schwanken lässt. Auch die Brennstrecken auf den einzelnen Strahlen lassen sich leicht durch Rechnung finden; ebenso die Dimensionen der Brennlinien.

Dass die Brennlinien im Allgemeinen schief gegeneinander stehen, erweist folgendes Zahlenbeispiel. Es sei

$$(a - 1)(\beta - 2) - (b - 3)(\alpha - 4) = 0,$$

$$(a - 2)(\beta - 5) - (b - 6)(\alpha - 1) = 0,$$

$$(a - 3)(\beta - 2) - (b - 1)(\alpha - 5) = 0,$$

$$(a - 2)(\beta - 3) - (b - 4)(\alpha - 6) = 0.$$

Die Finalgleichung ist

$$202a^2 - 861a + 89 = 0,$$

und die simultanen Wurzelwerthe

$$a' = 0,106 \qquad a'' = 4,156$$

$$b' = 5,445 \qquad b'' = 4,822$$

$$\alpha' = 2,720 \qquad \alpha'' = 5,212$$

$$\beta' = 5,502 \qquad \beta'' = 2,699.$$

Für die gegenzeitige Neigung der beiden Brennlinien findet man daraus den Winkel 39° 5′ 40″.

Wir wollen nunmehr diese Betrachtungen auf ein unendlich dünnes Bündel von vier Strahlen übertragen, indem wir die Grössen a_1 b_1 α_1 β_1 um unendlich kleine Grössen χ, ϑ, ω, ψ von derselben Ordnung der Kleinheit variiren. Wir setzen demgemäss voraus, es sei

$$a_2 = a_1 - \chi_1 \qquad b_2 = b_1 + \vartheta_1 \qquad \alpha_2 = \alpha_1 + \omega_1 \qquad \beta_2 = \beta_1 - \psi_1$$

$$a_3 = a_1 - \chi_2 \qquad b_3 = b_1 + \vartheta_2 \qquad \alpha_3 = \alpha_1 + \omega_2 \qquad \beta_3 = \beta_1 - \psi_2$$

$$a_4 = a_1 - \chi_3 \qquad b_4 = b_1 + \vartheta_3 \qquad \alpha_4 = \alpha_1 + \omega_3 \qquad \beta_4 = \beta_1 - \psi_3.$$

Das frühere System der drei linearen Gleichungen bezüglich a, b, α, β geht dadurch über in:

$$(a-a_1)\psi_1+(b-b_1)\omega_1+(\alpha-\alpha_1)\vartheta_1+(\beta-\beta_1)\chi_1+(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1)=0,$$

$$(a-a_1)\psi_2+(b-b_1)\omega_2+(\alpha-\alpha_1)\vartheta_2+(\beta-\beta_1)\chi_2+(\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2)=0,$$

$$(a-a_1)\psi_3+(b-b_1)\omega_3+(\alpha-\alpha_1)\vartheta_3+(\beta-\beta_1)\chi_3+(\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3)=0.$$

Die Absolutglieder sind nun zwar unendlich kleine Grössen der II. Ordnung; es wird sich aber zeigen, dass sie selbst dann nicht gegen die vorangehenden Glieder vernachlässigt werden dürfen, wenn $a-a_1$, $b-b_1$, $\alpha-\alpha_1$ und $\beta-\beta_1$ endliche von Null verschiedene Werthe annehmen. Eliminirt man nun je zwei dieser Grössen, so wird man zu folgenden Gleichungen geführt:

$$(a-a_1)\begin{vmatrix}\psi_1 & \chi_1 & \vartheta_1\\ \psi_2 & \chi_2 & \vartheta_2\\ \psi_3 & \chi_3 & \vartheta_3\end{vmatrix}+(b-b_1)\begin{vmatrix}\omega_1 & \chi_1 & \vartheta_1\\ \omega_2 & \chi_2 & \vartheta_2\\ \omega_3 & \chi_3 & \vartheta_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1) & \chi_1 & \vartheta_1\\ (\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2) & \chi_2 & \vartheta_2\\ (\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3) & \chi_3 & \vartheta_3\end{vmatrix}=0,$$

$$(b-b_1)\begin{vmatrix}\omega_1 & \chi_1 & \psi_1\\ \omega_2 & \chi_2 & \psi_2\\ \omega_3 & \chi_3 & \psi_3\end{vmatrix}+(\alpha-\alpha_1)\begin{vmatrix}\vartheta_1 & \chi_1 & \psi_1\\ \vartheta_2 & \chi_2 & \psi_2\\ \vartheta_3 & \chi_3 & \psi_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1) & \chi_1 & \psi_1\\ (\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2) & \chi_2 & \psi_2\\ (\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3) & \chi_3 & \psi_3\end{vmatrix}=0,$$

$$(\alpha-\alpha_1)\begin{vmatrix}\vartheta_1 & \omega_1 & \psi_1\\ \vartheta_2 & \omega_2 & \psi_2\\ \vartheta_3 & \omega_3 & \psi_3\end{vmatrix}+(\beta-\beta_1)\begin{vmatrix}\chi_1 & \omega_1 & \psi_1\\ \chi_2 & \omega_2 & \psi_2\\ \chi_3 & \omega_3 & \psi_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1) & \psi_1 & \omega_1\\ (\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2) & \psi_2 & \omega_2\\ (\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3) & \psi_3 & \omega_3\end{vmatrix}=0.$$

Um eine Gleichung in $(a-a_1)$ zu erhalten, würde man mit Hülfe vorstehender Gleichungen $(b-b_1)$, $(\alpha-\alpha_1)$ und $(\beta-\beta_1)$ aus der Grundgleichung

$$(a-a_1)(\beta-\beta_1)-(b-b_1)(\alpha-\alpha_1)=0$$

zu eliminiren haben. Zu diesem Zwecke bedient man sich mit Vortheil

folgender Relationen, in welchen das zweite Glied den gleichen Coefficienten hat:

$$(a-a_1)\begin{vmatrix}\psi_1 & \chi_1 & \vartheta_1\\ \psi_2 & \chi_2 & \vartheta_2\\ \psi_3 & \chi_3 & \vartheta_3\end{vmatrix} + (b-b_1)\begin{vmatrix}\omega_1 & \chi_1 & \vartheta_1\\ \omega_2 & \chi_2 & \vartheta_2\\ \omega_3 & \chi_3 & \vartheta_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1) & \chi_1 & \vartheta_1\\ (\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2) & \chi_2 & \vartheta_2\\ (\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3) & \chi_3 & \vartheta_3\end{vmatrix} = 0,$$

$$(a-a_1)\begin{vmatrix}\omega_1 & \chi_1 & \psi_1\\ \omega_2 & \chi_2 & \psi_2\\ \omega_3 & \chi_3 & \psi_3\end{vmatrix} + (\alpha-\alpha_1)\begin{vmatrix}\omega_1 & \chi_1 & \vartheta_1\\ \omega_2 & \chi_2 & \vartheta_2\\ \omega_3 & \chi_3 & \vartheta_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1) & \omega_1 & \chi_1\\ (\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2) & \omega_2 & \chi_2\\ (\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3) & \omega_3 & \chi_3\end{vmatrix} = 0,$$

$$(a-a_1)\begin{vmatrix}\vartheta_1 & \omega_1 & \psi_1\\ \vartheta_2 & \omega_2 & \psi_2\\ \vartheta_3 & \omega_3 & \psi_3\end{vmatrix} + (\beta-\beta_1)\begin{vmatrix}\omega_1 & \chi_1 & \vartheta_1\\ \omega_2 & \chi_2 & \vartheta_2\\ \omega_3 & \chi_3 & \vartheta_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}(\psi_1\chi_1-\vartheta_1\omega_1) & \vartheta_1 & \omega_1\\ (\psi_2\chi_2-\vartheta_2\omega_2) & \vartheta_2 & \omega_2\\ (\psi_3\chi_3-\vartheta_3\omega_3) & \vartheta_3 & \omega_3\end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen A, B, C, D und ebenso M, N, P unendlich kleine Grössen der III. Ordnung, ferner μ, ν, π solche der I. Ordnung oder derselben Ordnung wie ψ, χ, ϑ, ω, so kann man die drei letzten Gleichungen der Kürze wegen schreiben:

$$(a-a_1)A + (b-b_1)B + M\mu = 0,$$

$$(a-a_1)C + (\alpha-\alpha_1)B + N\nu = 0,$$

$$(a-a_1)D + (\beta-\beta_1)B + P\pi = 0.$$

Die Finalgleichung in $(a-a_1)$ ist

$$(a-a_1)^2(AC+BD) + (a-a_1)(CM\mu + AN\nu + BP\pi) + MN\mu\nu = 0.$$

Bei willkürlichen Annahmen der Elemente ψ, χ, ϑ, ω ist nun der Coefficient von $(a-a_1)^2$ eine unendlich kleine Grösse der 6. Ordnung, der von $(a-a_1)$ eine von der 7. Ordnung, das Absolutglied eine von der 8. Ordnung; und ähnlich wird es sich mit den Finalgleichungen in $(b-b_1)$, $(\alpha-\alpha_1)$ und $\beta-\beta_1$ verhalten. Wenn demnach $a-a_1$ auch nur *einen* von Null verschiedenen endlichen Werth haben soll, so muss $AC+BD$ eine kleine

Grösse der 7. Ordnung oder überhaupt die beiden grössten Coefficienten von gleicher Ordnung sein; entweder wird dann der andere Wurzelwerth eine kleine Grösse der 1. Ordnung, oder unendlich gross, oder die Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die *eine* Brennlinie schneidet alsdann sämtliche Strahlen unter einem endlichen von Null verschiedenen Winkel, wogegen die andere mit dem Hauptstrahle coincidirt, wenn der zweite Wurzelwerth verschwindet. Wenn dagegen $a - a_1$ *zwei* von Null verschiedene endliche Werthe haben soll, so müssen die drei Coefficienten der quadratischen Finalgleichung unendlich kleine Grössen der 8. oder einer höheren Ordnung sein. Bezeichnet demnach $(\psi)^1$ eine Grösse der 1. Ordnung, so ist die Bedingung, dass $a - a_1$ mindestens *einen* endlichen von Null verschiedenen Wert habe:

$$\frac{1}{\psi_1^6}\begin{vmatrix} \psi_1 & \chi_1 & \vartheta_1 \\ \psi_2 & \chi_2 & \vartheta_2 \\ \psi_3 & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1 & \chi_1 & \psi_1 \\ \omega_2 & \chi_2 & \psi_2 \\ \omega_3 & \chi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{\psi_1^6}\begin{vmatrix} \omega_1 & \chi_1 & \vartheta_1 \\ \omega_2 & \chi_2 & \vartheta_2 \\ \omega_3 & \chi_3 & \vartheta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \vartheta_1 & \omega_1 & \psi_1 \\ \vartheta_2 & \omega_2 & \psi_2 \\ \vartheta_3 & \omega_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = (\psi)^1.$$

Es ergibt sich daraus die bemerkenswerthe Thatsache, dass wenn eine Brennlinie den Hauptstrahl eines unendlich dünnen Strahlenbündels unter einem spitzen Winkel schneiden soll, die Summe der beiden voranstehenden endlichen Grössen zwar unendlich klein, aber nicht gleich Null werden darf, vorausgesetzt, dass die Coefficienten der beiden andern Glieder der Finalgleichung resp. von 7. und 8. Ordnung der Kleinheit sind; und ferner dass, wenn die Summe gleich Null wird, die Brennlinien mit dem Hauptstrahl coincidiren. Der Werth $a - a_1$ verschwindet auch, wenn $AC + BD$ eine kleine Grösse der 6. Ordnung bleibt. Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, dass wenn $a - a_1$ gleich Null wird, im Allgemeinen auch $(b - b_1)$, $(\alpha - \alpha_1)$ und $(\beta - \beta_1)$ verschwinden.

Wenn man das unendlich dünne Strahlenbündel als den Complex sämtlicher Normalen eines unendlich kleinen Elementes einer krummen Oberfläche ansieht, so ist, wie früher von mir gezeigt worden ist,

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \left(\frac{r}{\rho} - 1\right)\frac{\partial s}{\partial r},$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \left(1 - \frac{\rho}{r}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial \rho}.$$

wo δ_1 und δ_2 die Neigungswinkel der Brennlinien gegen den Hauptstrahl, r und ρ die Hauptkrümmungsradien, ∂s und $\partial \sigma$ die Differenziale der Hauptnormalschnitte der Fläche oder die rechtwinkligen Halbmesser der indicatorischen Linie bezeichnen. Die Analogie zwischen diesen und den vorangehenden Formeln besteht darin, dass auch δ_1 und δ_2 gleich Null werden, wenn die Differenzen $(a - a_1)$ u. s. w. verschwinden.

Zur Erläuterung des ersten Falles, in welchem die eine Brennlinie mit dem Hauptstrahle einen von Null verschiedenen Winkel bildet, die andere mit demselben coincidirt, möge ein Zahlenbeispiel gewählt werden, indem wir für die Variationen x, ϑ, ω, ψ etwa Tausendstel annehmen. Es sei

$$\begin{array}{llll} a_1 = 2{,}000 & \beta_1 = 5{,}000 & b_1 = 1{,}000 & \alpha_1 = 3{,}000 \\ a_2 = 1{,}998 & \beta_2 = 4{,}9995 & b_2 = 0{,}999 & \alpha_2 = 2{,}999 \\ a_3 = 1{,}997 & \beta_3 = 4{,}99749975 & b_3 = 0{,}998 & \alpha_3 = 2{,}996 \\ a_4 = 1{,}996 & \beta_4 = 4{,}99750050 & b_4 = 0{,}997 & \alpha_4 = 2{,}997. \end{array}$$

Daraus folgt

$$\begin{array}{llll} \chi_1 = 0{,}002 & \psi_1 = 0{,}0005 & \vartheta_1 = -0{,}001 & \omega_1 = -0{,}001 \\ \chi_2 = 0{,}003 & \psi_2 = 0{,}00250025 & \vartheta_2 = -0{,}002 & \omega_2 = -0{,}004 \\ \chi_3 = 0{,}004 & \psi_3 = 0{,}00249950 & \vartheta_3 = -0{,}003 & \omega_3 = -0{,}003. \end{array}$$

Die Rechnungen ergeben daraus weiter

$$A = \frac{2{,}001}{1000^3}, \qquad C = \frac{3{,}997}{1000^3}, \qquad B = -\frac{4{,}000}{1000^3}, \qquad D = \frac{1{,}999}{1000^3},$$

also den Anforderungen gemäss

$$1000^6(AC + BD) = 0{,}001997 = (\psi)^1.$$

Es sind demnach A, B, C, D sehr kleine Grössen 3. Ordnung, die Coefficienten der beiden ersten Glieder der Finalgleichung von der 7. Ordnung, das Absolutglied von der 8. Ordnung. Setzt man der Kürze wegen $a - a_1 = x$, $\beta - \beta_1 = y$, $b - b_1 = z$, $\alpha - \alpha_1 = t$, so erhält man folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} xy - zt &= 0, \\ 0{,}5x + 2y - z - t &= 0, \\ 2{,}50025x + 3y - 4z - 2t - 0{,}0005 &= 0, \\ 2{,}49950x + 4y - 3z - 3t + 0{,}0010 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus resultiren die Gleichungen

$$0,49975x - y + 0,0005 = 0,$$
$$0,50025x - z - 0,0005 = 0,$$
$$0,99925x - t + 0,0015 = 0.$$

Die Finalgleichung in x ist

$$0,49925x^2 - 0,997x - 0,003 = 0,$$

und ihre Wurzeln $x_1 = 2$, $x_2 = -0,003$. Daraus ergeben sich die simultanen Werthe:

$a_1 = 2$	$\beta_1 = 5$	$b_1 = 1$	$\alpha_1 = 3$
$a' = 4$	$\beta' = 6$	$b' = 2$	$\alpha' = 5$
$a'' = 1,997$	$\beta'' = 4,999$	$b'' = 0,998$	$\alpha'' = 2,9985.$

Wir können weiter die Winkel berechnen, welche die Brennlinien mit dem Hauptstrahl und mit einander bilden. Da das Strahlenbündel sehr dünn ist, so können wir den ersten Strahl als den Hauptstrahl betrachten und die Neigungswinkel δ_1 und δ_2 gegen diesen suchen; dieselben werden nur um sehr kleine Grössen von den übrigen drei Paaren abweichen; man findet $\delta_1 = 11^\circ\ 29'\ 30''$ und δ_2 nahezu gleich Null, den Winkel der Brennlinien mit einander gleich $11^\circ\ 31'\ 30''$. Die Coordinaten der beiden Brennpuncte sind

$$x_1 = -1,\ y_1 = -4,\ z_1 = -1;\ x_2 = -2,\ y_2 = -4,5,\ z_2 = -0,5;$$

endlich die Brennstrecke gleich $\sqrt{1,5}$.

Auch der allgemeinere Fall, in welchem beide Winkel δ_1 und δ_2 von 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschieden sind, möge hier als besonders lehrreich durch ein Zahlenbeispiel illustrirt werden. Wir nehmen an, es sei

$a_1 = 2,000$	$\beta_1 = 3,000$	$b_1 = -1,000$	$\alpha_1 = 3,000$
$a_2 = 1,998$	$\beta_2 = 2,99775057$	$b_2 = -1,00374981$	$\alpha_2 = 2,999$
$a_3 = 1,997$	$\beta_3 = 2,99224859$	$b_3 = -1,00625047$	$\alpha_3 = 2,996$
$a_4 = 1,996$	$\beta_4 = 2,99375132$	$b_4 = -1,00774956$	$\alpha_4 = 2,997.$

Daraus ergeben sich folgende Werthe der Variationen:

$$\chi_1 = 0,002 \quad \psi_1 = 0,00224943 \quad \vartheta_1 = -0,00374981 \quad \omega_1 = -0,001$$
$$\chi_2 = 0,003 \quad \psi_2 = 0,00775141 \quad \vartheta_2 = -0,00625047 \quad \omega_2 = -0,004$$
$$\chi_3 = 0,004 \quad \psi_3 = 0,00624868 \quad \vartheta_3 = -0,00774956 \quad \omega_3 = -0,003.$$

Die Berechnung der Determinanten ergibt weiter

$$A = -\frac{0,00181}{1000^3}, \quad C = -\frac{0,00543}{1000^3}, \quad B = \frac{0,00181}{1000^3}, \quad D = -\frac{0,00905}{1000^3}.$$

Es ist demnach der Anforderung gemäss

$$1000^6(AC + BD) = -0,0000065522 = (\psi)^2.$$

Die Determinanten A, B, C, D sind kleine Grössen der 4. Ordnung, mithin alle drei Coefficienten der quadratischen Finalgleichung von 8. also gleicher Ordnung. Für x, y, z, t erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$2,24943x + 2y - z - 3,74981t + 0,00076 = 0,$$
$$7,75141x + 3y - 4z - 6,25047t - 0,00188 = 0,$$
$$6,24868x + 4y - 3z - 7,74956t + 0,00176 = 0.$$

Daraus resultiren die Gleichungen

$$5x - y - 7 = 0,$$
$$x - z + 1 = 0,$$
$$3x - t - 4 = 0.$$

Die Finalgleichungen werden folgende:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1,$$
$$y^2 - y - 6 = 0, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = -2,$$
$$z^2 - 5z + 6 = 0, \quad z_1 = 3, \quad z_2 = 2,$$
$$t^2 - t - 2 = 0, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = -1.$$

Die Constanten der beiden Brennlinien und des Hauptstrahles sind demzufolge:

$$\begin{array}{llll} a' = 4 & \beta' = 6 & b' = 2 & \alpha' = 5 \\ a'' = 3 & \beta'' = 1 & b'' = 1 & \alpha'' = 2 \\ a_1 = 2 & \beta_1 = 3 & b_1 = -1 & \alpha_1 = 3. \end{array}$$

Bezeichnen wir den Winkel, welchen die beiden Brennlinien mit einander bilden, durch ε, so finden wir

$$\delta_1 = 51^\circ\ 25'\ 10'', \qquad \delta_2 = 42^\circ\ 23'\ 40'', \qquad \varepsilon = 9^\circ\ 16'\ 30''.$$

Die Coordinaten der beiden Brennpuncte sind

$$\begin{array}{lll} \xi_1 = -1, & \eta_1 = 0{,}5, & \zeta_1 = -1 \\ \xi_2 = -5, & \eta_2 = -2, & \zeta_2 = 1. \end{array}$$

Die Brennstrecke hat die Grösse

$$\sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2} = \sqrt{26{,}25}.$$

Unsere Untersuchungen haben also zu dem beachtenswerthen Resultate geführt, dass die beiden Brennlinien unendlich dünner Strahlenbündel durch vier einzelne Strahlen bestimmt sind und dass dieselben unter sich und mit dem Hauptstrahle sehr verschiedene Winkel bilden können.

Wenn nun neue Strahlen hinzutreten, welche zu denselben Brennlinien gehören, so müssen sie gewisse Bedingungen erfüllen. Die Variationen χ_n, ϑ_n, ω_n, ψ_n müssen offenbar so gewählt werden, dass das oben aufgestellte System von linearen Gleichungen bestehen bleibt. Durch die Variationen der Constanten muss folgendem Systeme von Gleichungen Genüge geschehen:

$$(a - a_1)\psi_1 + (b - b_1)\omega_1 + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_1 + (\beta - \beta_1)\chi_1 + (\psi_1\chi_1 - \vartheta_1\omega_1) = 0,$$

$$(a - a_1)\psi_2 + (b - b_1)\omega_2 + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_2 + (\beta - \beta_1)\chi_2 + (\psi_2\chi_2 - \vartheta_2\omega_2) = 0,$$

$$(a - a_1)\psi_3 + (b - b_1)\omega_3 + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_3 + (\beta - \beta_1)\chi_3 + (\psi_3\chi_3 - \vartheta_3\omega_3) = 0,$$

$$(a - a_1)\psi_n + (b - b_1)\omega_n + (\alpha - \alpha_1)\vartheta_n + (\beta - \beta_1)\chi_n + (\psi_n\chi_n - \vartheta_n\omega_n) = 0.$$

Die Bedingungsgleichungen sind offenbar die folgenden zwei:

$$\begin{vmatrix} \chi_n & \vartheta_n & \omega_n & \psi_n \\ \chi_1 & \vartheta_1 & \omega_1 & \psi_1 \\ \chi_2 & \vartheta_2 & \omega_2 & \psi_2 \\ \chi_3 & \vartheta_3 & \omega_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wofür man kürzer schreiben kann

$$D\chi_n + C\vartheta_n + A\omega_n + B\psi_n = 0;$$

ausserdem

$$\begin{vmatrix} (\psi_n\chi_n - \vartheta_n\omega_n) & \vartheta_n & \omega_n & \psi_n \\ (\psi_1\chi_1 - \vartheta_1\omega_1) & \vartheta_1 & \omega_1 & \psi_1 \\ (\psi_2\chi_2 - \vartheta_2\omega_2) & \vartheta_2 & \omega_2 & \psi_2 \\ (\psi_3\chi_3 - \vartheta_3\omega_3) & \vartheta_3 & \omega_3 & \psi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch willkürliche Annahmen von χ_n und ϑ_n erhält man daraus zwei lineare Gleichungen in ω_n und ψ_n, woraus diese berechnet werden können. Die beiden Relationen bringen zugleich eine bemerkenswerthe Eigenschaft sämtlicher Normalen eines unendlich kleinen Elements einer krummen Oberfläche zum Ausdruck. Wenn die Constanten der beiden Brennlinien bereits bekannt sind, wird man sich mit Vortheil der beiden linearen Gleichungen

$$(a' - a_n)\psi_n + (b' - b_n)\omega_n + (\alpha' - \alpha_1)\vartheta_n + (\beta' - \beta_1)\chi_n = 0,$$

$$(a'' - a_n)\psi_n + (b'' - b_n)\omega_n + (\alpha'' - \alpha_1)\vartheta_n + (\beta'' - \beta_1)\chi_n = 0$$

bedienen können. Die Rechnung ist selbstverständlich bis auf kleine Grössen der 2. Ordnung incl. genau auszuführen.

Es lässt sich nun noch zeigen, dass es unendlich viele reelle unendlich dünne Strahlenbündel giebt, welche sich zu einem gegebenen Paare imaginärer Brennlinien construiren lassen. Wir nehmen an, die Constanten derselben seien

$$a = m_1 \pm n_1\sqrt{-1}, \quad \beta = m_2 \pm n_2\sqrt{-1}, \quad b = m_3 \pm n_3\sqrt{-1}, \quad \alpha = m_4 \pm n_4\sqrt{-1};$$

und setzen zunächst voraus, es sei der Hauptstrahl durch die Elemente $a_1\ b_1\ \alpha_1\ \beta_1$ bestimmt; alsdann gelten folgende Gleichungen:

$$(m_1 + n_1\sqrt{-1} - a_n)\psi_n + (m_3 + n_3\sqrt{-1} - b_n)\omega_n + (m_4 + n_4\sqrt{-1} - \alpha_1)\vartheta_n + (m_2 + n_2\sqrt{-1} - \beta_1)\chi_n = 0,$$

$$(m_1 - n_1\sqrt{-1} - a_n)\psi_n + (m_3 - n_3\sqrt{-1} - b_n)\omega_n + (m_4 - n_4\sqrt{-1} - \alpha_1)\vartheta_n + (m_2 - n_2\sqrt{-1} - \beta_1)\chi_n = 0.$$

Daraus folgt

$$(m_1 - a_n)\psi_n + (m_3 - b_n)\omega_n + (m_4 - \alpha_1)\vartheta_n + (m_2 - \beta_1)\chi_n = 0,$$

$$n_1\psi_n + n_3\omega_n + n_4\vartheta_n + n_2\chi_n = 0.$$

Durch willkürliche Annahmen von χ_n und ϑ_n erhält man also zwei lineare Gleichungen in ψ_n und ω_n, woraus diese berechnet werden können.

Wenn der Hauptstrahl nicht bekannt ist, so lässt sich ein solcher demnach immer finden auf folgende Art:

Indem man z. B. b_1 und α_1 willkürlich wählt, lassen sich die zugehörigen Werthe a_1 und β_1 berechnen aus folgenden Gleichungen:

$$(m_1 + n_1\sqrt{-1} - a_1)(m_2 + n_2\sqrt{-1} - \beta_1) - (m_3 + n_3\sqrt{-1} - b_1)(m_4 + n_4\sqrt{-1} - \alpha_1) = 0,$$

$$(m_1 - n_1\sqrt{-1} - a_1)(m_2 - n_2\sqrt{-1} - \beta_1) - (m_3 - n_3\sqrt{-1} - b_1)(m_4 - n_4\sqrt{-1} - \alpha_1) = 0.$$

Führt man die Multiplicationen aus, und setzt der Kürze wegen

$$(m_1m_2 - n_1n_2) + (m_1n_2 + m_2n_1)\sqrt{-1} = A_1 + B_1\sqrt{-1},$$

$$(m_3m_4 - n_3n_4) + (m_3n_4 + m_4n_3)\sqrt{-1} = A_2 + B_2\sqrt{-1},$$

so findet man

$$a_1\beta_1 - m_2a_1 - m_1\beta_1 + A_1 - A_2 - \alpha_1b_1 + m_3\alpha_1 + m_4b_1 = 0,$$

$$n_2a_1 + n_1\beta_1 - B_1 + B_2 - n_3\alpha_1 - n_4b_1 = 0.$$

Eliminirt man β_1, so erhält man die Finalgleichung

$$a_1^2 + f(\alpha_1, b_1)a_1 + F(\alpha_1, b_1) = 0,$$

wo f eine lineare, F eine quadratische Function ist. Es lassen sich dann α_1 und b_1 allemal so wählen, dass a_1 reell wird; dadurch wird auch β_1 reell. Mit Hülfe der Gleichungen

$$(m_1 - a_n)\psi_n + (m_3 - b_n)\omega_n + (m_4 - \alpha_1)\vartheta_n + (m_2 - \beta_1)\chi_n = 0,$$
$$n_1\psi_n + n_3\omega_n + n_4\vartheta_n + n_2\chi_n = 0$$

lassen sich alsdann unendlich viele unendlich nahe Strahlen des Bündels berechnen.

Sämtliche oben aufgestellte Gleichungen gelten natürlich auch für endlich dicke Strahlensysteme mit gemeinschaftlichen Brennlinien. Es treten aber Abkürzungen der linearen Gleichungen selbst dann nicht ein, wenn die Variationen χ, ϑ, ω, ψ unendlich klein, also die Absolutglieder unendlich kleine Grössen der 2. Ordnung werden. In einem derartigen Fehler dürfte die Ursache zu suchen sein, in Folge deren STURM und KUMMER in ihren bekannten Untersuchungen (POGG. Ann. Bd. 65 und BORCH. Journ. Bd. 57) so wie auch HELMHOLTZ (*Physiol. Opt.* S. 246) zu einem abweichenden Fundamentaltheoreme des Astigmatismus gelangt sind.

Rostock, 22 September 1883.

SUR L'USAGE DES PRODUITS INFINIS

DANS

LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

CH. HERMITE et R. LIPSCHITZ.

1. Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Lipschitz.

..... Une remarque à cette occasion sur les formules 7, 8, 9, 10, 11 de la page 89 des *Fundamenta;* il me paraît convenable d'introduire ces quatre produits infinis:

$$\begin{aligned} A &= (1 + q^2)(1 + q^4)(1 + q^6) \dots \\ B &= (1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5) \dots \\ C &= (1 + q)(1 + q^3)(1 + q^5) \dots \\ D &= (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \dots \end{aligned} \qquad (ABC = 1)$$

on a alors

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}A^2B, \qquad \sqrt[4]{k'} = B^2A$$

$$\sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = 2\sqrt[4]{q}.A^2D, \qquad \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = B^2D, \qquad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = C^2D.$$

En évitant les dénominateurs j'obtiens comme vous voyez plus de symétrie.

Paris, 14 Décembre 1883.

2. Extrait d'une lettre de M. Lipschitz à M. Hermite.

. . . . . Si vous avez jugé convenable d'introduire les quatres produits infinis

$$A = \Pi_n(1 + q^{2n}), \qquad B = \Pi_n(1 - q^{2n-1})$$

$$C = \Pi_n(1 + q^{2n-1}), \qquad D = \Pi_n(1 - q^{2n})$$

où n parcourt tous les nombres depuis 1 jusqu'à l'infini, qui sont conjoints par l'équation

$$ABC = 1,$$

il me semble, que votre procédé se trouve confirmé par des considérations, que je me permets de vous expliquer.

Dans le mémoire posthume de Gauss, *Zur Theorie der transcendenten Functionen gehörig,* T. III des oeuvres complètes, l'auteur a exprimé les fonctions $\vartheta_0(0)$, $\vartheta_3(0)$ et quelques autres à l'aide du seul produit infini

$$\Pi_n(1 - q^n),$$

qu'il désigne par $[q]$, mais que je désignerai par la charactéristique $G(q)$. L'article 4, page 440, contient les représentations

$$\vartheta_0(0) = \frac{G^2(q)}{G(q^2)}, \qquad \vartheta_3(0) = \frac{G^5(q^2)}{G^2(q)\,G^2(q^4)}$$

et la relation remarquable

$$G(-q) = \frac{G^3(q^2)}{G(q)\,G(q^4)}.$$

Pour la fonction $\vartheta_2(0)$ on a d'abord l'expression

$$\vartheta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{G^2(q^4)}{G(q^2)}.$$

Partant, en introduisant dans la formule mentionnée relative à $\vartheta_3(0)$ la fonction $G(-q)$, je parviens aux trois expressions symétriques

$$\vartheta_0(0) = \frac{G^2(q)}{G(q^2)}, \quad \vartheta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}\frac{G^2(q^4)}{G(q^2)}, \quad \vartheta_3(0) = \frac{G^2(-q)}{G(q^2)}.$$

Mais pour les produits infinis A, B, C, D on a les formules

$$A = \frac{G(q^4)}{G(q^2)}, \quad B = \frac{G(q)}{G(q^2)}, \quad C = \frac{G(-q)}{G(q^2)}, \quad D = G(q^2),$$

qui mènent des dites expressions à celles que vous m'avez bien voulu communiquer. En même temps votre équation $ABC = 1$ coïncide avec l'équation citée de Gauss, que l'on peut écrire, comme il suit

$$\text{(I)} \qquad G(q)G(q^4)G(-q) = G^3(q^2),$$

et la relation $\vartheta_0^4(0) + \vartheta_2^4(0) - \vartheta_3^4(0) = 0$ se change dans celle-ci

$$\text{(II)} \qquad G^8(q) + 16q\,G^8(q^4) - G^8(-q) = 0,$$

qui ne diffère que par le facteur $G^8(q^2)$ de la formule (14) de l'article 36 des *Fundamenta.*

Ayant fait ces remarques sur l'usage du produit $G(q)$ je me suis proposé d'exprimer les quatre fonctions $\vartheta_0(w)$, $\vartheta_1(w)$, $\vartheta_2(w)$, $\vartheta_3(w)$ par le produit infini correspondant

$$P(w, q) = \Pi_n(1 - q^n e^{2iw\pi})(1 - q^n e^{-2iw\pi}),$$

d'où suit l'équation

$$G(q) = \sqrt{P(0, q)}.$$

Alors les formules connues

$$\vartheta_0(w) = G(q^2)\Pi_n(1 - 2q^{2n-1}\cos 2w\pi + q^{4n-2})$$

$$\vartheta_1(w) = G(q^2)\,2q^{\frac{1}{4}}\sin w\pi\,\Pi_n(1 - 2q^{2n}\cos 2w\pi + q^{4n})$$

$$\vartheta_2(w) = G(q^2)\,2q^{\frac{1}{4}}\cos w\pi\,\Pi_n(1 + 2q^{2n}\cos 2w\pi + q^{4n})$$

$$\vartheta_3(w) = G(q^2)\Pi_n(1 + 2q^{2n-1}\cos 2w\pi + q^{4n-2})$$

sont transformées dans les suivantes

$$\vartheta_0(w) = \sqrt{P(0,\ q^2)}\,\frac{P(w,\ q)}{P(w,\ q^2)}$$

$$\vartheta_1(w) = \sqrt{P(0,\ q^2)}\,2q^{\frac{1}{4}}\sin w\pi P(w,\ q^2)$$

$$\vartheta_2(w) = \sqrt{P(0,\ q^2)}\,2q^{\frac{1}{4}}\cos w\pi\frac{P(2w,\ q^4)}{P(w,\ q^2)}$$

$$\vartheta_3(w) = \sqrt{P(0,\ q^2)}\,\frac{P(w,\ -q)}{P(w,\ q^2)}.$$

D'ailleurs la multiplication actuelle des produits infinis donne l'équation

(III) $$P(w,\ q)P(2w,\ q^4)P(w,\ -q) = P^2(w,\ q^2)P(2w,\ q^2).$$

De l'autre part, comme on a les expressions

$$\sqrt{k}\,\mathrm{sn}\,(2Kw) = \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{cn}\,(2Kw) = \frac{\vartheta_2(w)}{\vartheta_0(w)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{k'}}\,\mathrm{dn}\,(2Kw) = \frac{\vartheta_3(w)}{\vartheta_0(w)}$$

et en conséquence l'équation

$$\vartheta_1^4(w) - \vartheta_2^4(w) + \vartheta_3^4(w) - \vartheta_0^4(w) = 0,$$

on parvient à l'identité

(IV) $$16q\sin^4 w\pi P^8(w, q^2) - 16q\cos^4 w\pi P^4(2w, q^4) + P^4(w, -q) - P^4(w, q) = 0.$$

Or les équations (III) et (IV) se changent respectivement dans les équations (I) et (II) en supposant $w = 0$.

Bonn, 20 Décembre 1883.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE CAUCHY.

Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite

PAR

E. GOURSAT

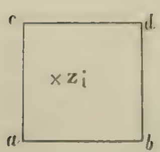
À TOULOUSE.

Voici une démonstration du théorème de CAUCHY, qui me paraît un peu plus simple que les démonstrations habituelles. Elle repose uniquement sur la définition de la dérivée et sur cette remarque que les intégrales définies $\int dz$, $\int z dz$, prises le long d'un contour fermé quelconque, sont nulles.

Soit $f(z)$ une fonction de la variable complexe z, uniforme et continue, ainsi que sa première dérivée $f'(z)$, à l'intérieur d'une aire A limitée par un contour fermé C, simple ou multiple, et sur ce contour lui-même; j'admettrai de plus que ce contour a une *longueur* finie. Imaginons que l'on partage l'aire A en parties plus petites par des parallèles équidistantes à deux directions rectangulaires; l'intégrale $\int f(z)dz$, prise le long du contour total dans le sens direct, est égale à la somme des intégrales $\int f(z)dz$, prises dans le même sens le long du contour de chacune des parties en lesquelles on a subdivisé l'aire A. Il suffit de remarquer qu'en ajoutant ces dernières les parties de l'intégrale qui proviennent des lignes auxiliaires se détruisent, comme étant prises deux fois dans des sens

différents, et il reste l'intégrale $\int f(z)dz$, prise le long du contour total. Soit C_i le contour de l'une de ces parties; on aura

$$(1) \qquad \int_{(C)} f(z)dz = \Sigma \int_{(C_i)} f(z)dz.$$



Les parties A_i sont de deux sortes; les unes sont des carrés, les autres sont limitées en partie par des lignes droites, en partie par des arcs du contour C. Je considère d'abord un carré, tel que $abdc$ et un point z_i à l'intérieur. Le long du contour de ce carré, on a

$$\frac{f(z) - f(z_i)}{z - z_i} = f'(z_i) + \varepsilon,$$

ou

$$f(z) = f(z_i) + f'(z_i)(z - z_i) + \varepsilon(z - z_i);$$

par suite

$$\int_{(C_i)} f(z)dz = [f(z_i) - z_i f'(z_i)] \int_{(C_i)} dz + f'(z_i) \int_{(C_i)} zdz + \int_{(C_i)} \varepsilon(z - z_i)dz.$$

Les deux premières intégrales étant nulles, d'après la remarque faite au début, il reste

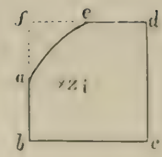
$$\int_{(C_i)} f(z)dz = \int_{(C_i)} \varepsilon(z - z_i)dz.$$

Soit l la distance de deux parallèles voisines et ε_i la valeur maximum du module de ε le long du contour du carré $abdc$; on sait que

$$\text{Mod}\left(\int_{(C_i)} f(z)dz\right) < \int_{(C_i)} \varepsilon_i l\sqrt{2}ds = 4\varepsilon_i l^2\sqrt{2}.$$

En appelant a_i l'aire de ce carré, on aura

$$(2) \qquad \text{Mod}\left|\int_{(C_i)} f(z)dz\right| < 4\varepsilon_i\sqrt{2}\,a_i.$$



Prenons en second lieu un polygone curviligne tel que *abcde* et un point z_i à l'intérieur. On aura encore

$$\int_{(C_i)} f(z)dz = \int_{(C_i)} \varepsilon(z - z_i)dz,$$

et par suite

$$\text{Mod}\left[\int_{(C_i)} f(z)dz\right] < \varepsilon_i l\sqrt{2}\int_{(C_i)} dz < \varepsilon_i l\sqrt{2}(4l + \text{arc}\, ae)$$

ou

$$\text{(3)} \qquad \text{Mod}\left[\int_{(C_i)} f(z)dz\right] < 4\varepsilon_i\sqrt{2}b_i + \varepsilon_i l\sqrt{2}\,\text{arc}\, ae,$$

en appelant encore ε_i la valeur maximum de ε et b_i l'aire du carré *abcdef*. En ajoutant toutes les inégalités (2) et (3) et désignant par η la valeur maximum des ε_i, on a *à fortiori*

$$\text{Mod}\left[\int_{(C)} f(z)dz\right] < \eta\sqrt{2}\{4\mathcal{A} + lS\},$$

où $\mathcal{A}$ désigne la somme des aires des carrés qui ont une partie à l'intérieur de l'aire A et S la longueur totale du contour C. On voit que le second membre est le produit d'un facteur qui a une limite supérieure finie par un facteur $\eta\sqrt{2}$ qui peut être rendu aussi petit qu'on le voudra. Or le premier membre a une valeur déterminée; donc on doit avoir

$$\int_{(C)} f(z)dz = 0.$$

A la vérité, la démonstration suppose, pour être rendue absolument rigoureuse, que l'on peut prendre la longueur l assez petite pour que tous les modules des quantités désignées par ε soient constamment moindres qu'un nombre donné à l'avance, aussi petit qu'on le voudra. C'est ce qui résulte des hypothèses faites sur $f(z)$ et sa dérivée. En effet, cette dérivée étant supposée continue à l'intérieur de l'aire A et sur le contour

lui-même, on sait, qu'étant donnée une quantité positive σ, arbitrairement choisie, on pourra toujours trouver une autre quantité positive δ telle que

$$\mathrm{Mod}\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f'(z)\right|<\sigma,$$

dès que le module de h ne surpasse pas δ, et cela pour toutes les valeurs de z considérées. Il suffira donc de prendre $l<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ pour qu'on soit sûr que les modules de toutes les quantités ε sont moindres que σ, et la démonstration devient entièrement rigoureuse.

Toulouse, Novembre 1883.

SUR LES GROUPES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

Dans trois mémoires (Acta Mathematica T. 1, p. 1—62: *Sur les groupes fuchsiens;* Acta T. 1, p. 193—294: *Sur les fonctions fuchsiennes;* Acta T. 3, p. 49—92: *Sur les groupes kleinéens*) j'ai étudié les groupes discontinus formés par des substitutions linéaires et les fonctions uniformes qui ne sont pas altérées par les substitutions de ces groupes. Avant de montrer comment ces fonctions et d'autres analogues donnent les intégrales des équations linéaires à coëfficients algébriques, il est nécessaire de résoudre deux problèmes importants:

1°. Étant donnée une équation linéaire à coëfficients algébriques, déterminer son groupe.

2°. Étant donnée une équation linéaire du 2^d ordre dépendant de certains paramètres arbitraires, disposer de ces paramètres de manière que le groupe de l'équation soit fuchsien.

§ 1. *Invariants fondamentaux.*

Occupons-nous d'abord du premier de ces problèmes.

Considérons une équation quelconque à coëfficients algébriques:

$$(1)\qquad \frac{d^p v}{dx^p} + \varphi_{p-1}(x, y)\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}} + \varphi_{p-2}(x, y)\frac{d^{p-2}v}{dx^{p-2}} + \dots$$

$$\dots + \varphi_1(x, y)\frac{dv}{dx} + \varphi_0(x, y)v = 0.$$

Dans cette équation les φ sont des fonctions rationnelles de deux variables x et y liées entre elles par une relation algébrique

$$\psi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Supposons que l'on considère un système fondamental d'intégrales de l'équation (1)

$$v_1, v_2, \ldots, v_p$$

et qu'on fasse décrire à x un contour fermé C tel que y revienne à la même valeur; les intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ prendront des valeurs nouvelles $w_1, w_2, \ldots, w_p$ qui seront des fonctions linéaires de leurs valeurs initiales, de telle sorte que l'on ait:

$$w_k = \sum \alpha_{ik} v_i.$$

En d'autres termes, les intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ subiront une substitution linéaire

$$S = (v_1, v_2, \ldots, v_p; w_1, w_2, \ldots, w_p)$$

que l'on pourra représenter par le tableau à double entrée des coëfficients:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \ldots & \alpha_{pp} \end{vmatrix}.$$

Si l'on opère ainsi pour tous les contours C possibles, on obtiendra un ensemble de substitutions linéaires qui formeront un groupe G. Ce sera *le groupe de l'équation* (1).

On peut toujours supposer que dans l'équation (1), le coëfficient φ_{p-1} est identiquement nul; car si cela n'était pas, on ramènerait au cas où ce coëfficient est nul par une transformation bien simple et bien connue. On en conclut que le déterminant de la substitution S est égal à l'unité; on a donc:

$$\sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22} \ldots \alpha_{nn} = 1. \tag{3}$$

La connaissance de l'équation (1) et du contour C ne suffit pas pour déterminer la substitution S. En effet cette substitution dépend en outre du choix du système d'intégrales fondamentales $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Supposons qu'on les remplace par p autres intégrales fondamentales:

$$u_1, u_2, \ldots, u_p.$$

On aura

$$u_k = \sum \beta_{ik} v_i$$

de sorte que la substitution

$$\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_p; u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

sera linéaire. En décrivant un contour C et en partant des intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_p$, on obtiendra alors une substitution linéaire:

$$\sigma^{-1} S \sigma.$$

L'ensemble des substitutions $\sigma^{-1} S \sigma$ formera un groupe que l'on pourra désigner par la notation $\sigma^{-1} G \sigma$ et qui pourra, aussi bien que G, être regardé comme le groupe de l'équation (1), si au lieu d'envisager le système des intégrales v, on envisage celui des intégrales u. On sait que le groupe $\sigma^{-1} G \sigma$ s'appelle le transformé de G par la substitution linéaire σ.

Afin de n'avoir qu'un seul groupe pour l'équation (1) nous ne considérerons pas comme distincts le groupe G et ses transformés par les diverses substitutions linéaires.

Cela posé, cherchons les invariants de la substitution S, c'est à dire les fonctions de ses coëfficients qui demeurent invariables quand on remplace S par $\sigma^{-1} S \sigma$. Formons l'équation:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + t & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} + t & \ldots & \alpha_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \ldots & \alpha_{pp} + t \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Les racines de cette équation, et par conséquent aussi ses coëfficients, ne changeront pas quand on remplacera S par $\sigma^{-1} S \sigma$. Ce seront des invariants de S.

Ces invariants sont au nombre de $p-1$. En effet l'équation en t (4) est de degré p; elle a donc $p+1$ coëfficients. Mais le coëfficient de t^p et le terme tout connu sont égaux à 1; il reste donc $p-1$ invariants. Ces invariants, qui sont des coëfficients de l'équation (4) seront des fonctions entières des α.

Supposons que les intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ soient définies de la manière suivante: Au point initial du contour C (pour $x=0$ par exemple) v_1 est égal à 1 et ses $p-1$ premières dérivées sont nulles; v_i est nul, ainsi que ses $p-1$ premières dérivées, à l'exception de la dérivée d'ordre $i-1$ qui est égale à 1. Soit maintenant w_k^1 ce que devient l'intégrale v_k quand x revient au point initial après avoir décrit le contour C et w_k^i ce que devient sa dérivée d'ordre $i-1$; on aura:

$$w_k = \sum w_k^i v_i; \quad w_k^i = \alpha_{ik}.$$

Il en résulte que les invariants sont des fonctions rationnelles entières des w_k^i.

Supposons en particulier $p=2$; l'équation (1) devient:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + v\varphi_2(x, y) = 0$$

et l'équation (4) s'écrit:

$$\begin{vmatrix} w_1^1 + t & w_2^1 \\ w_1^2 & w_2^2 + t \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$t^2 + t(w_1^1 + w_2^2) + 1 = 0.$$

La substitution S admet alors comme invariant unique $w_1^1 + w_2^2$. Si k est son multiplicateur, cet invariant est précisément $k + \frac{1}{k}$.

Si l'on connaissait les invariants de toutes les substitutions S, le groupe G serait complètement déterminé, puisque nous ne le regardons pas comme distinct de ses transformés $\sigma^{-1}G\sigma$. Mais il ne sera pas nécessaire de connaître tous ces invariants, il suffira d'en connaître un certain nombre que nous appellerons *invariants fondamentaux* et dont tous les autres ne seront que des fonctions.

Combien y a-t-il d'invariants fondamentaux? Supposons que le groupe G soit dérivé de n substitutions fondamentales. Les coëfficients de chaque substitution seront au nombre de p^2 mais à cause de la relation (3), il n'en restera que $p^2 - 1$ d'indépendants. Pour les n substitutions cela fait en tout $n(p^2 - 1)$ coëfficients. Mais nous ne considérons pas comme distincts le groupe G et ses divers transformés. Il faut donc retrancher $p^2 - 1$ du nombre précédent et on arrive à cette conclusion que pour déterminer le groupe G, il faut $(n - 1)(p^2 - 1)$ conditions.

Si donc on se donne $(n - 1)(p^2 - 1)$ invariants quelconques (pourvu qu'ils soient indépendants) tous les autres n'en seront que des fonctions. On choisira par exemple pour invariants fondamentaux les invariants de $(n - 1)(p + 1)$ substitutions convenablement choisies.

On peut toujours supposer que l'équation (1) a ses coëfficients rationnels. En effet supposons que cela ne soit pas et que l'équation (2) soit une relation algébrique de degré m de telle façon qu'à chaque valeur de x correspondent m valeurs de y

$$y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}.$$

On pourra toujours tracer dans le plan des x, $m - 1$ contours $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$ tels que quand x décrit le contour C_i, y_0 se change en y_i. Soient maintenant:

$$v_1^0, v_2^0, \ldots, v_p^0.$$

p intégrales fondamentales de l'équation (1) correspondant à la valeur y_0 de y. Soient

$$v_1^i, v_2^i, \ldots, v_p^i$$

ce que deviennent ces intégrales quand x a décrit le contour C_i. Cela posé les mp fonctions

$$\begin{matrix} v_1^0, & v_2^0, & \ldots, & v_p^0 \\ v_1^1, & v_2^1, & \ldots, & v_p^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1^{m-1}, & v_2^{m-1}, & \ldots, & v_p^{m-1} \end{matrix}$$

satisferont à une équation (1') linéaire et d'ordre mp dont les coëfficients seront rationnels en x. La connaissance du groupe de (1') suffira pour déterminer le groupe de l'équation (1).

Supposons donc que l'équation (1) ait ses coëfficients rationnels et qu'elle présente $n+1$ points singuliers, en y comprenant le point ∞ s'il y a lieu et en n'y comprenant pas les points à apparence singulière. Le groupe est alors dérivé de n substitutions fondamentales dont on connait immédiatement les invariants, à l'aide de l'équation déterminante, pourvu que les intégrales soient régulières; ce sont les substitutions auxquelles on est conduit en faisant décrire à la variable un contour fermé qui n'enveloppe qu'un seul point singulier. Il reste donc à calculer les invariants de $(n-1)p-2$ substitutions.

Soit a un point singulier quelconque et soient

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$$

les racines de l'équation déterminante correspondante.

Il y aura dans le voisinage du point a, p intégrales particulièrement remarquables. La k^e d'entre elles sera égale à $(x-a)^{\lambda_k}$ multipliée par une fonction holomorphe. Soient:

$$v_1, v_2, \ldots, v_p$$

ces p intégrales que j'appellerai intégrales canoniques par rapport au point a. Lorsque la variable décrira un cercle infiniment petit autour du point a, ces p intégrales v subiront la substitution linéaire:

$$\begin{vmatrix} e^{i\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{i\lambda_2} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & e^{i\lambda_p} \end{vmatrix}$$

que j'appellerai substitution canonique relative au point b.

Soient de même:

$$w_1, w_2, \ldots, w_p$$

les intégrales canoniques par rapport à un second point singulier b.

Joignons les deux points a et b par un chemin quelconque *amb*. Lorsque la variable partant du point a et décrivant le chemin *amb* sera parvenue dans le voisinage du point b, les intégrales canoniques $v_1, v_2, \ldots, v_p$ seront devenues des fonctions linéaires des intégrales canoniques $w_1, w_2, \ldots, w_p$, de telle sorte que l'on ait:

$$v_k = \sum \beta_{ik} w_i.$$

La substitution linéaire:

$$S = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{p1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{p2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{1p} & \beta_{2p} & \cdots & \beta_{pp} \end{vmatrix}$$

s'appellera la *substitution auxiliaire relative au chemin amb*. Si l'on connaît cette substitution auxiliaire on connaîtra aussi une substitution du groupe de l'équation (1), ce sera celle que subissent les intégrales canoniques $v_1, v_2, \ldots, v_p$, quand partant du voisinage du point a, la variable décrit le chemin *amb* jusque dans le voisinage du point b, décrit ensuite un cercle infiniment petit autour du point b, et revient enfin dans le voisinage du point a par le chemin *bma*.

Soit Σ la substitution canonique relative au point b. Quand la variable décrira le contour précité, les intégrales v subiront la substitution $S^{-1}\Sigma S$.

Supposons que l'on joigne entre eux les $n+1$ points singuliers par n chemins quelconques, de façon que l'on puisse circuler entre deux quelconques de ces points singuliers à l'aide de ces n chemins; lorsque l'on connaîtra les substitutions auxiliaires relatives à ces n chemins, le groupe de l'équation (1) sera complètement déterminé.

Soient en effet a l'un des points singuliers et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les n autres. Joignons par exemple le point a à chacun des points b_i par une droite. Soient $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ les substitutions canoniques relatives respectivement aux points $a, b_1, b_2, \ldots, b_n$; soient $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les

substitutions auxiliaires relatives aux chemins $ab_1, ab_2, \ldots, ab_n$. Le groupe de l'équation (1) sera dérivé des $n+1$ substitutions:

$$\Sigma, \quad S_1^{-1}\Sigma_1 S_1, \quad S_2^{-1}\Sigma_2 S_2, \quad \ldots, \quad S_n^{-1}\Sigma_n S_n$$

entre lesquelles il y a d'ailleurs la relation:

$$\Sigma S_1^{-1}\Sigma_1 S_1 S_2^{-1}\Sigma_2 S_2 \ \ldots \ S_n^{-1}\Sigma_n S_n = 1.$$

Supposons maintenant que l'on distingue deux des points singuliers a et b; et soient $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ les $n-1$ autres. Joignons a et b par $n-1$ chemins différents $am_1b, am_2b, \ldots, am_{n-1}b$ et soient $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$ les substitutions auxiliaires correspondantes. Ces $n-1$ chemins partageront le plan en $n-1$ régions; supposons que chacune de ces régions contienne un point singulier c_i et un seul. Le groupe de l'équation (1) sera entièrement déterminé. Si en effet Σ et Σ' sont les substitutions canoniques relatives aux deux points a et b, le groupe sera dérivé des n substitutions:

$$\Sigma, \quad S_1^{-1}S_2, \quad S_2^{-1}S_3, \quad \ldots, \quad S_{n-2}^{-1}S_{n-1}, \quad S_{n-1}^{-1}S_1.$$

Supposons que le point c_i soit contenu dans la région limitée par les deux chemins am_ib et $am_{i+1}b$, décrivons un contour situé tout entier dans cette région et enveloppant le point c_i; quand la variable décrira ce contour, les intégrales canoniques relatives au point a subiront la substitution:

$$S_i^{-1}S_{i+1}.$$

On voit que pour déterminer le groupe de l'équation (1) il suffit de connaitre, soit les invariants fondamentaux, soit certaines substitutions auxiliaires.

§ 2. *Calcul numérique des invariants fondamentaux.*

Les invariants fondamentaux qui définissent complètement le groupe d'une équation linéaire sont évidemment des fonctions des coëfficients de cette équation; d'où le problème suivant qui se pose tout naturellement: déterminer ces invariants en fonctions de ces coëfficients. Mais en réalité

ce problème est double: on peut se proposer de calculer numériquement ces invariants quand on a affaire à une équation numérique donnée; mais il n'est pas non plus indigne d'intérêt d'étudier, au point de vue de la théorie des fonctions, la façon dont varient les invariants quand on fait varier les coëfficients. Les méthodes propres au calcul numérique ne nous apprennent rien sur la nature de ces fonctions, pendant que les formules les plus instructives à ce dernier point de vue conduiraient à des calculs pénibles si on voulait les traduire en nombres.

Au point de vue du calcul numérique, un grand nombre de méthodes ont déjà été proposées, parmi lesquelles je citerai celle de M. Fuchs (tome 75, Journal de Crelle) et celle de M. Hamburger (tome 83, Journal de Crelle).

La méthode de M. Fuchs consiste à distinguer deux des $n + 1$ points singuliers, a et b, comme à la fin du paragraphe précédent, puis à diviser le plan en $n - 1$ régions par $n - 1$ chemins am_1b, am_2b, ..., $am_{n-1}b$, de façon que chacune de ces $n - 1$ régions contienne un des $n - 1$ autres points singuliers c_1, c_2, ..., c_{n-1} et un seul. Le savant géomètre d'Heidelberg donne ensuite un développement des intégrales canoniques relatives au point a et ce développement est valable dans une certaine région R_a. De même les intégrales canoniques relatives au point b sont susceptibles d'un développement valable dans une région R_b. Les deux régions R_a et R_b ont $n - 1$ parties communes P_1, P_2, ..., P_{n-1}. On peut d'ailleurs tracer le chemin am_ib de telle façon qu'il reste constamment intérieur à l'une des régions R_a et R_b ou à toutes deux à la fois, et qu'il traverse la région P_i. Il suffit alors de comparer les deux développements de M. Fuchs pour une valeur de x quelconque intérieure à P_i (région dans laquelle les deux développements sont valables à la fois) pour pouvoir calculer les coëfficients de la substitution auxiliaire relative au chemin am_ib. Le groupe de l'équation (1) est ainsi entièrement déterminé.

On peut varier cette méthode à l'infini; supposons en effet que nous joignions deux points singuliers quelconques a et b par un chemin quelconque amb et que nous cherchions la substitution auxiliaire relative à ce chemin. Traçons autour des deux points a et b deux régions quelconques R_a et R_b telles 1° que la première contienne l'unique point singulier a et la seconde l'unique point singulier b; 2° qu'elles aient une

partie commune P; 3° que le chemin amb reste constamment intérieur au moins à l'une des régions R_a et R_b et traverse la région P. Supposons que deux fonctions $f_a(x)$ (et $f_b(x)$) soient telles que quand x reste intérieur à la région R_a (ou à la région R_b) la fonction f_a (ou la fonction f_b) aient constamment leur module inférieur à 1, de telle sorte que ces deux fonctions donnent respectivement la représentation conforme du cercle de rayon 1 et de centre 0 sur la région R_a et sur la région R_b. Je suppose de plus:

$$f_a(a) = 0, \qquad f_b(b) = 0.$$

Les intégrales canoniques relatives au point a se développeront suivant les puissances de $f_a(x)$. Ce développement dont les coëfficients se calculent par récurrence sera valable dans toute la région R_a. De même les intégrales canoniques relatives au point b seront dans toute la région R_b développables suivant les puissances de $f_b(x)$. Il suffira de comparer les deux développements pour un point de la région P (où ils sont valables à la fois) pour calculer les coëfficients de la substitution auxiliaire cherchée.

On choisira les régions R_a et R_b de telle façon que les fonctions f_a et f_b soient aussi simples que possible. On pourra prendre par exemple un rectangle, ou un fuseau limité par deux arcs de cercle qui se coupent, ou la portion du plan comprise entre deux droites parallèles.

Voici maintenant en quoi consiste la méthode de M. Hamburger.

Soit 0 un des points singuliers et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les n autres, rangés par ordre de module croissant; soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ leurs modules; construisons les deux cercles qui ont pour centre l'origine et pour rayon ρ_i et ρ_{i+1}. Considérons un contour fermé C compris tout entier dans la région annulaire limitée par ces deux cercles. Soit A un point de ce contour C; supposons par exemple:

$$A = \sqrt{\rho_i \rho_{i+1}}\,.$$

Soit $v_1, v_2, \ldots, v_p$ un système fondamental d'intégrales dans le voisinage du point A. Soient $w_1, w_2, \ldots, w_p$ ce que deviennent ces intégrales quand on revient au point A après avoir décrit le contour C. Les intégrales v peuvent se développer suivant les puissances croissantes de

$$\mathrm{L}x - \mathrm{L}A$$

et si on a:

$$\mathrm{l}\rho_{i+1} - \mathrm{l}A > 2\pi$$

les développements sont encore valables quand on fait

$$\mathrm{l}x - \mathrm{l}A = 2i\pi.$$

En substituant alors $2i\pi$ à la place de $\mathrm{l}x - \mathrm{l}A$ dans les développements des intégrales v et de leurs dérivées, on aura les valeurs des intégrales w et de leurs dérivées, ce qui suffit pour déterminer la substitution du groupe de l'équation (1), qui correspond au contour C.

La méthode de M. Hamburger peut être aisément étendue au cas où

$$\mathrm{l}\rho_{i+1} - \mathrm{l}A < 2\pi.$$

Nous poserons pour abréger

$$\mathrm{l}\rho_{i+1} - \mathrm{l}A = \frac{\pi}{2\alpha},$$

puis nous développerons les intégrales v suivant les puissances de

$$\frac{x^{i\alpha} - A^{i\alpha}}{x^{i\alpha} + A^{i\alpha}} = z.$$

Le développement sera encore convergent pour

$$x = Ae^{2i\pi}$$

ou:

$$z = \frac{e^{-2\pi\alpha} - 1}{e^{-2\pi\alpha} + 1}.$$

En remplaçant dans les développements des intégrales v et de leurs dérivées z par cette valeur, on aura les valeurs des intégrales w et de leurs dérivées et par conséquent la substitution qui correspond au contour C.

Il suffit de réfléchir un instant à la nature de ces méthodes pour comprendre qu'on peut les varier à l'infini. Le calculateur devra se guider dans son choix d'après la convergence plus ou moins rapide des séries employées. Or cette convergence dépend avant tout de la position relative des $n + 1$ points singuliers. C'est donc cette position qui déterminera le choix d'une méthode.

Mais aucune des méthodes ainsi proposées ne nous apprendrait rien sur les propriétés des invariants fondamentaux considérés comme fonctions des coëfficients et étudiés au point de vue de la théorie des fonctions. C'est cette étude que nous allons aborder dans le paragraphe suivant.

§ 3. *Propriétés des invariants fondamentaux.*

Ecrivons l'équation (1) sous la forme suivante:

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \sum_{k=0}^{k=p-2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{h} \frac{A_{hki}}{(x-a_i)^h} \frac{d^k v}{dx^k}. \tag{1}$$

Pour écrire ainsi cette équation nous avons décomposé en éléments simples les coëfficients des diverses dérivées de v, qui par hypothèse sont des fonctions rationnelles de x. Nous avons supposé de plus que ces fonctions rationnelles n'admettaient pas de partie entière, car il est toujours permis de faire cette hypothèse.

Les invariants fondamentaux que nous cherchons seront des fonctions des a_i et des A_{hki}. Considérons d'abord les a_i comme des constantes et les A comme seules variables. Je dis que *les invariants seront des fonctions entières des A.*

Pour le faire voir il suffit de démontrer ce qui suit: Écrivons l'équation (1) sous la forme suivante:

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \alpha \sum \varphi_k \frac{d^k v}{dx^k} + \beta \sum \psi_k \frac{d^k v}{dx^k}. \tag{1'}$$

Les φ_k et les ψ_k sont des fonctions rationnelles de x que je suppose entièrement déterminées; α et β sont des paramètres que je vais regarder comme variables. Il suffit, dis-je, de démontrer que les invariants sont des fonctions entières de α et de β.

Considérons un point quelconque a du plan et décrivons de ce point comme centre un cercle K assez petit pour ne contenir aucun point

singulier. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_p$, p intégrales assujetties aux conditions suivantes:

$$\text{Pour } x = a, \quad v_1 = 1, \text{ ses } p - 1 \text{ premières dérivées sont nulles,}$$

$$v_i = 0, \text{ ses } p - 1 \text{ premières dérivées sont nulles,}$$

excepté la dérivée d'ordre $i - 1$ qui est égale à 1.

Les intégrales $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont développables à l'intérieur du cercle K suivant les puissances croissantes de $x - a$. Le coëfficient de $(x - a)^m$ est un polynôme d'ordre $m - p + 1$ en α et en β. On a donc un développement de ces intégrales suivant les puissances de $x - a$, de α et de β. Il reste à faire voir que ce développement est convergent.

Si on regarde v comme fonction de x, de α et de β, l'équation (1) peut être regardée comme une équation aux différences partielles et le théorème de Mme de Kowalevsky (J. de Crelle, T. 80) appliqué à cette équation montre que v peut être développé suivant les puissances de $x - a$, de $\alpha - \alpha_0$ et de $\beta - \beta_0$, pourvu que x soit intérieur au cercle K et que les modules $\alpha - \alpha_0$ et $\beta - \beta_0$ soient suffisamment petits. Ainsi v est une fonction holomorphe de α et de β dans le voisinage d'un point quelconque α_0, β_0; c'est donc une fonction entière de α et de β et le développement de v suivant les puissances de $x - a$, de α et de β est convergent quels que soient α et β pourvu que x soit intérieur au cercle K.

Il faut maintenant démontrer que si x est regardé comme une constante, v est encore fonction entière de α et de β, *quand même x est extérieur au cercle K*. Pour définir complètement la fonction v dans ce cas, il ne suffit pas de se donner la valeur de x, il faut encore connaître le chemin amx par lequel cette variable a atteint cette valeur, en partant du point a.

Supposons pour fixer les idées que b soit un point intérieur à K, que K' soit un cercle ayant son centre en b et ne contenant aucun point singulier, que x soit intérieur au cercle K' et extérieur à K, enfin que le chemin amx soit tout entier intérieur à la figure formée par l'ensemble des deux cercles K et K'.

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_p$ un système fondamental d'intégrales défini comme il suit: u_i devra satisfaire pour $x = b$ aux mêmes conditions auxquelles était assujettie v_i pour $x = a$.

Soit v_i^1 la valeur de v_i pour $x = b$, v_i^{k+1} la valeur de sa dérivée k^e. On aura:

$$v_i = \sum_{k=1}^{k=p} v_i^k u_k.$$

Or les v_i^k sont des fonctions entières de α et de β puisque le point b est intérieur au cercle K, et les u_k sont aussi des fonctions entières de α et de β puisque le point x est intérieur au cercle K'. Donc les v_i sont aussi des fonctions entières de α et de β.

Le raisonnement serait le même si au lieu d'avoir à considérer seulement deux cercles de convergence K et K', il était nécessaire d'en envisager plusieurs.

Supposons maintenant que le chemin amx se réduise à un contour fermé C. Les valeurs des intégrales v_i et de leurs dérivées ne sont alors autre chose que ce que nous avons appelé w_i^k dans le § 1. Or les invariants fondamentaux sont des polynômes entiers par rapport aux w_i^k, ce seront donc des fonctions entières de α et de β.

Ainsi quand on regarde les a_i comme des constantes, les invariants sont des fonctions entières des A_{hki} et peuvent par conséquent être développées suivant les puissances de ces quantités A_{hki}. Considérons un quelconque des coëfficients de ces développements, ce sera évidemment une fonction des a_i^* et c'est la nature de cette fonction qu'il nous reste à étudier. Il est aisé de voir que ces fonctions s'expriment à l'aide de quadratures successives. Ecrivons en effet l'équation (1) sous la forme (1') et considérons le développement de l'intégrale v_i suivant les puissances de α et de β:

$$v_i = \sum v_{imn}\alpha^m\beta^n.$$

Je dis qu'on peut obtenir le coefficient v_{imn} par de simples quadratures. Je suppose en effet que cela soit vrai pour $v_{i.m-1.n}$ et $v_{i.m.n-1}$; cela sera vrai aussi pour v_{imn} car on a identiquement:

$$\frac{d^p v_{imn}}{dx^p} = \sum \varphi_k \frac{d^k v_{i.m-1.n}}{dx^k} + \sum \psi_k \frac{d^k v_{i.m.n-1}}{dx^k}$$

et la dérivée p^e de v_{imn} s'exprimant à l'aide de quadratures successives, il en sera de même de la fonction v_{imn} elle-même.

Soit maintenant w_{imn}^k le coëfficient de $\alpha^m\beta^n$ dans le développement de w_i^k. Ce coëfficient s'exprimera pour la même raison par des quadratures, et il en sera de même des coëfficients qui entrent dans le développement des invariants, car ce sont des polynômes entiers par rapport aux w_{imn}^k. On peut d'ailleurs pousser plus loin l'étude du développement de la fonction v_i. A cet effet posons:

$$A(x, \alpha_1) = \int_0^x \frac{dx}{x - a_1}$$

$$A(x, \alpha_1, \alpha_2) = \int_0^x \frac{dx A(x, a_1)}{x - a_2}$$

. . . .

$$A(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \alpha_q) = \int_0^x \frac{dx A(x, a_1, a_2, \ldots, a_{q-1})}{x - a_q}.$$

Remarquons maintenant qu'on peut mettre l'équation (1) sous la forme de p équations simultanées du 1[er] ordre. Si les intégrales sont régulières dans le voisinage de chacun des points singuliers, nous pourrons introduire p variables simultanées $u_1 = v$, u_2, ..., u_p et remplacer l'équation (1) par les p équations simultanées

$$\frac{du_i}{dx} = \sum \varphi_{ik} u_k.$$

Les φ_{ik} seront des fonctions rationnelles de la forme suivante

$$\varphi_{ik} = \sum \frac{A_{i.k.\lambda}}{x - a_\lambda}, \tag{2}$$

les $A_{i.k.\lambda}$ étant des constantes. Supposons par exemple $p = 2$, l'équation (1) s'écrira:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{P}{Q^2} v;$$

Q sera le produit $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$ et P sera un polynôme en x de degré $2n - 2$. Nous pourrons toujours trouver deux

polynômes entiers A et C de degré $n-1$ en x et satisfaisant identiquement à la relation:

$$C + A^2 + A'Q - AQ' = P.$$

Posons alors $v = u_1$ et introduisons une variable auxiliaire u_2. Nous pourrons écrire

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{A}{Q}u_1 + \frac{1}{Q}u_2$$

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{C}{Q}u_1 + \frac{Q'-A}{Q}u_2.$$

Les équations sont bien de la forme (2).

Il est aisé de voir maintenant que si on développe l'intégrale v_i suivant les puissances des $A_{ik\lambda}$, le coëfficient d'un terme quelconque sera une somme de fonctions telles que A où les paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ ne seront autre chose que les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se succédant dans un ordre quelconque et chacun d'eux pouvant d'ailleurs être répété un nombre quelconque de fois.

§ 4. *Fonctions inverses.*

Nous avons jusqu'ici étudié les invariants fondamentaux comme fonctions des coëfficients de l'équation (1); mais si au contraire on regarde les coëfficients comme des fonctions des invariants fondamentaux, on est conduit à des transcendantes intéressantes qui jouent par rapport aux équations linéaires le même rôle que la fonction modulaire par rapport aux intégrales algébriques.

Mais ici il importe de faire une remarque; reprenons l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^p v}{dx^p} = \sum \varphi_k \frac{d^k v}{dx^k}$$

et considérons les infinis des coëfficients φ_k; ils seront de deux sortes: les uns seront des points singuliers proprement dits et quand la variable x décrira un contour fermé autour d'un de ces points, les intégrales

subiront une substitution linéaire; les autres seront de simples pôles des intégrales ou bien encore si a est un pareil point, toutes les intégrales se mettront sous la forme

$$(x-a)^\lambda \varphi(x),$$

λ étant une constante qui est la même pour toutes les intégrales et $\varphi(x)$ étant holomorphe. Il en résulte que quand x décrit un contour fermé autour du point a toutes les intégrales sont multipliées par un même facteur et que leurs rapports reprennent leurs valeurs primitives. Ces points s'appelleront des *points à apparence singulière*. Pour qu'un infini des coëfficients φ_k soit un point à apparence singulière, il faut $\frac{(p+2)(p-1)}{2}$ conditions.

Supposons donc une équation de la forme (1) admettant n points singuliers outre le point ∞, savoir $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et q points à apparence singulière $b_1, b_2, \ldots, b_q$.

Je suppose que les intégrales soient partout régulières. L'équation (1) s'écrira alors:

$$\frac{d^p v}{dx^p} = \sum_{k=0}^{k=p-2} \frac{P_k}{Q^{p-k}} \frac{d^k v}{dx^k}.$$

Nous posons:

$$Q = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_q)$$

et P_k est un polynôme d'ordre

$$(p-k)(n+q-1).$$

L'équation (1) contient alors

$$\frac{p(p+1)}{2}(n+q) - \frac{p(p-1)}{2}$$

paramètres, à savoir:

1°. Les $n+q$ infinis $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_q$.

2°. Les

$$\frac{(n+q-1)(p+2)(p-1)}{2} + p - 1$$

coëfficients des polynômes P_k.

Mais nous avons

$$q\frac{(p+2)(p-1)}{2}$$

conditions exprimant que les points b sont à apparence singulière. Il reste donc

$$n\frac{p(p+1)}{2}+q-\frac{p(p-1)}{2}$$

paramètres indépendants.

Remarquons de plus qu'on peut toujours supposer

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1$$

car si cela n'était pas, on ferait un changement linéaire de variable. Il faut donc encore de ce chef, retrancher deux paramètres.

Si nous supposons de plus qu'il n'y a pas de points à apparence singulière, il restera enfin

$$(2) \qquad n\frac{p(p+1)}{2}-\frac{p(p-1)}{2}-2$$

paramètres. Mais le groupe G de l'équation (1) est dérivé de n substitutions et nous avons vu au § 1 qu'un pareil groupe G, si on ne le regarde pas comme distinct de ses transformés par les diverses substitutions linéaires, dépend de

$$(3) \qquad (n-1)(p^2-1)$$

invariants fondamentaux.

Si $p=2$ les expressions (2) et (3) se réduisent toutes deux à $3n-3$. Le nombre des paramètres de l'équation est alors égal au nombre des paramètres du groupe; d'où la conséquence suivante:

On peut *en général* trouver une équation du 2^d ordre, sans points à apparence singulière qui admette un groupe donné.

Je veux dire par là que pour que cette équation existe, il n'est pas nécessaire qu'il y ait aucune relation entre les invariants du groupe et que si on doit leur imposer certaines conditions, ce ne sont que des conditions d'inégalité. D'ailleurs on pourra trouver une infinité d'équations

du 2^d ordre qui auront des points à apparence singulière et qui admettront un même groupe.

Supposons maintenant $p > 2$ et bien entendu $n > 1$. On voit aisément que l'expression (2) est toujours plus petite que l'expression (3); d'où cette conséquence:

On ne peut pas en général trouver une équation d'ordre supérieur au second, sans points à apparence singulière et qui admette un groupe donné.

Il faut donc en général, si l'on veut construire une équation ayant un groupe donné, lui donner des points à apparence singulière.

C'est pour éviter ces points qui compliqueraient notablement les résultats et les démonstrations que je me bornerai ici au cas des équations du 2^d ordre. Je supposerai donc que j'ai affaire à une équation du 2^d ordre sans point à apparence singulière.

Considérons sur la sphère les $n + 1$ points singuliers

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3, \; a_4, \; \ldots, \; a_n, \; a_{n+1} = \infty$$

et joignons les par n coupures

$$a_1 a_2, \quad a_2 a_3, \quad \ldots, \quad a_n a_{n+1}.$$

Considérons deux intégrales quelconques de l'équation (1) et leur rapport z; quand x parcourra la sphère sans franchir les coupures, z parcourra une certaine région R. Cette région sera analogue aux polygones générateurs des groupes fuchsiens et kleinéens, mais elle pourra se recouvrir partiellement elle-même; elle aura $2n$ côtés:

$$\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_n\alpha_{n+1}$$

et

$$\alpha_1\beta_2, \quad \beta_2\beta_3, \quad \ldots, \quad \beta_n\alpha_{n+1}$$

répondant aux n coupures:

$$a_1 a_2, \quad a_2 a_3, \quad \ldots, \quad a_n a_{n+1}.$$

Les côtés $\beta_i\beta_{i+1}$ et $\alpha_i\alpha_{i+1}$ seront conjugués et on passera de l'un à l'autre par une substitution linéaire S_i. Les sommets α_1 et α_{n+1} formeront

chacun un cycle. Il y aura $n-1$ autres cycles formés respectivement des sommets α_i et β_i. La somme des angles α_i et β_i est alors égale à

$$2\pi(1-2\lambda_i)$$

λ_i étant la plus petite racine de l'équation déterminante relative au point singulier a_i. De même les angles α_1 et α_{n+1} sont égaux à

$$2\pi(1-2\lambda_1) \quad \text{et} \quad 2\pi(1-2\lambda_{n+1}).$$

Quand on connait les valeurs de

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1} \tag{4}$$

les substitutions S_i sont entièrement déterminées et comme ce sont les substitutions fondamentales du groupe G, les invariants fondamentaux de ce groupe s'exprimeront aisément en fonctions des quantités (4). Nous regarderons donc les coëfficients de l'équation (1) comme des fonctions des quantités (4).

La région R n'est pas entièrement déterminée quand on se donne les quantités (4); en effet on peut faire varier arbitrairement la forme des côtés $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, ..., $\alpha_n\alpha_{n+1}$ et il s'en suit des variations correspondantes des côtés conjugués $\alpha_1\beta_2$, $\beta_2\beta_3$, ..., $\beta_n\alpha_{n+1}$. Toutefois toutes les régions R obtenues de la sorte sont *équivalentes,* au sens donné à ce mot au § 3 du *mémoire sur les groupes kleinéens* (Acta Mathematica, T. 3, p. 63). On pourra d'ailleurs tracer les coupures

$$a_1a_2, \ldots, a_na_{n+1}$$

de telle façon que les côtés

$$\alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_n\alpha_{n+1}$$

aient telle forme que l'on veut.

Il résulte de là, que s'il existait deux équations (1) conduisant à un même système de valeurs des quantités (4), on pourrait toujours tracer les coupures de telle façon que la région R soit la même pour l'une et pour l'autre équation.

Imaginons maintenant des fonctions de z jouissant des propriétés suivantes: 1° elles seront uniformes quand z parcourra la région R; il

est clair que si la région R se recouvre partiellement elle-même, à deux points z_0 et z_1 de cette région pourra correspondre un même point du plan; dans ce cas la fonction pourra prendre deux valeurs différentes aux points z_0 et z_1; 2° elles reprendront la même valeur en deux points correspondants du périmètre de R; 3° elles n'auront d'autre singularité que des pôles (et des points singuliers logarithmiques dans le cas où quelques-uns des angles α ou β sont nuls).

Il est clair que toutes ces fonctions s'exprimeront rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles. (Cf. SCHOTTKY, J. de CRELLE, T. 83 et *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* Acta Mathematica, T. 1, p. 228.)

Si l'on regarde maintenant x comme une fonction de z, ce sera précisément une des fonctions dont nous venons de parler, et il est clair que toutes les autres seront rationnelles en x.

Supposons maintenant qu'il y ait deux équations (1) qui conduisent à un même système de valeurs des quantités (4) et par conséquent à une même région R. Soient x et x_1 les variables correspondantes que nous regarderons comme des fonctions de z. D'après ce qui précède, x sera rationnel en x_1 et x_1 en x et par conséquent on aura entre ces variables une relation de la forme:

$$Axx_1 + Bx + Cx_1 + D = 0.$$

Soient maintenant a_i et a_i^1 les valeurs de x et de x_1 qui correspondent à la valeur $z = \alpha_i$. Ce seront des points singuliers des deux équations (1) et par hypothèse on aura:

$$a_1 = a_1^1 = 0, \qquad a_2 = a_2^1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_{n+1}^1 = \infty.$$

C'est à dire qu'on aura:

$$x = x_1$$

pour $z = \alpha_1$, $z = \alpha_2$, $z = \alpha_{n+1}$.

Il en résulte que x sera identiquement égal à x_1. Les deux équations (1) dont nous avions supposé l'existence seront donc identiques.

Il résulte de là que quand les quantités (4) sont entièrement déterminées il en est de même de l'équation (1) et que *les coëfficients de cette équation sont des fonctions uniformes des quantités* (4).

Ainsi nous sommes conduits à une nouvelle classe de fonctions uniformes de plusieurs variables. Ces fonctions demeurent invariables quand on fait subir aux quantités (4) certaines substitutions dont je vais dire quelques mots.

Reprenons pour cela le polygone R défini plus haut et appelons S_k la substitution linéaire qui change $\beta_k\beta_{k+1}$ en $\alpha_k\alpha_{k+1}$. Convenons en outre de poser pour plus de symétrie dans les notations:

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_{i+n+1} = \alpha_i, \quad \beta_{i+n+1} = \beta_i.$$

La substitution suivante:

$$(5) \qquad \left| \begin{matrix} \alpha_i, & \beta_{k+1-i} S_k \\ \beta_i, & \alpha_{k+1-i} \\ \lambda_i, & \lambda_{k+1-i} \end{matrix} \right|$$

appliquée aux quantités (4) laissera inaltérée la fonction dont nous nous occupons. Nous avons, grâce au tableau (5) les nouvelles valeurs des quantités α, β et λ en fonctions des anciennes, car les coëfficients de la substitution linéaire S_k s'obtiennent aisément en fonctions des α, des β et des λ.

§ 5. *Énoncé du deuxième problème.*

Nous avons montré dans les quatre paragraphes précédents comment on peut résoudre le problème suivant:

Trouver le groupe d'une équation donnée, soit au point de vue du calcul numérique, soit au point de vue de la théorie des fonctions.

Voici le second problème que j'ai à résoudre avant d'aller plus loin.

On donne une équation du second ordre:

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v$$

où φ est une fonction rationnelle de deux variables x et y liées par une relation algébrique

$$(2) \qquad \psi(x, y) = 0.$$

On suppose que la fonction φ dépend d'un certain nombre de paramètres et on demande de disposer de ces paramètres de telle manière que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales. Nous dirons alors pour abréger que l'équation (1) est *fuchsienne.*

Nous ne nous occuperons dans ce qui va suivre que des fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental (1ère, 2e et 6e familles). Nous laissons donc systématiquement de côté les fonctions fuchsiennes qui existent dans tout le plan.

Pour que l'équation (1) soit fuchsienne, il faut qu'elle remplisse d'une part certaines conditions algébriques, d'autre part un certain nombre de conditions transcendantes.

Commençons par énoncer les conditions algébriques.

Les points singuliers de l'éqation (1) sont de deux sortes:

1°. Les points où y cesse d'être une fonction holomorphe de x et les points où x ou y cessent d'être finis.

2°. Les points singuliers proprement dits.

Il n'y a pas à s'inquiéter des premiers, car on peut poser:

$$x = \theta(x', y'), \qquad y = \theta_1(x', y')$$

θ et θ_1 étant des fonctions rationnelles, et s'arranger de telle façon que dans le voisinage du point considéré, les nouvelles variables x' et y' restent finies et que y' soit holomorphe en x'.

Quant aux points singuliers proprement dits, à chacun d'eux correspond une équation déterminante et *la différence des racines de cette équation doit être nulle ou une partie aliquote de l'unité.* Ce sont là les conditions algébriques qu'il s'agissait d'énoncer et quand elles seront remplies, je dirai que l'équation (1) est *normale.*

Considérons d'abord deux équations normales:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v, \qquad \frac{d^2v}{dx_1^2} = \varphi_1(x_1)v$$

où nous supposerons que φ et φ_1 sont des fonctions rationnelles de x et de x_1. Si l'on peut passer de la première de ces équations à la seconde en posant

$$x = \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d}$$

nous ne regarderons pas ces deux équations comme distinctes.

Considérons maintenant une équation normale plus générale:

(1) $$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v$$ (2) $$\psi(x, y) = 0$$

et posons:

(3) $$x' = \theta(x, y), \qquad y' = \theta_1(x, y).$$

Si on laisse de côté certains cas exceptionnels, on pourra tirer des équations (2) et (3) x et y en fonctions rationnelles de x' et de y'. Je supposerai que ces cas exceptionnels ne se présentent pas.

On trouvera alors

(1′) $$\frac{d^2v}{dx'^2} = \varphi'(x', y')v$$ (2′) $$\psi'(x', y') = 0.$$

Je ne regarderai pas comme distinctes les équations (1) et (1′).

Je dirai que deux équations

(1) $$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v$$ (2) $$\psi(x, y) = 0$$

(1′) $$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v$$ (2′) $$\psi_1(x, y) = 0$$

appartiennent au même *type* si les deux relations (2) et (2′) sont identiques et si les points singuliers des équations (1) et (1′) sont les mêmes ainsi que les équations déterminantes relatives à chacun d'eux.

Il va sans dire que si une équation

(1″) $$\frac{d^2v}{dx'^2} = \varphi_1'(x', y')v$$ (2″) $$\psi_1'(x', y') = 0$$

ne doit pas être regardée comme distincte de (1′) en vertu de la convention faite plus haut, je dirai encore que (1) et (1″) appartiennent au même type.

Voici le problème qu'il s'agit de résoudre.

1°. *Reconnaître si parmi les équations d'un type donné, il y a une équation fuchsienne.*

2°. *Trouver cette équation si elle existe.*

Mais il faut d'abord faire une distinction et classer les types d'équations normales en types fuchsiens, elliptiques et rationnels.

Supposons que x soit une fonction fuchsienne du rapport des intégrales de l'équation (1); cette fonction admettra un polygone générateur R_0 qui aura $2n$ côtés et $2n$ sommets de la première sorte. La somme des angles du polygone devra être plus petite que

$$\pi(2n - 2).$$

Soit q le genre de la relation (2); p le nombre des points singuliers de l'équation (1); $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ces points singuliers; α_i la différence des racines de l'équation déterminante relative au point a_i.

Si $p > 0$, les sommets de R_0 se répartiront en cycles; on aura:

$$n = 2q + p - 1$$

et la somme des angles sera égale à

$$2\pi \sum \alpha_i .$$

On doit donc avoir l'inégalité:

$$\sum \alpha_i < 2q + p - 2. \tag{4}$$

Si $p = 0$, les sommets de R_0 formeront un seul cycle et la somme des angles sera 2π. On aura:

$$n = 2q$$

d'où l'inégalité

$$q > 1. \tag{4'}$$

Si les inégalités (4) ou (4') sont satisfaites, le type considéré sera un type *fuchsien*.

Supposons maintenant que x soit fonction doublement périodique du rapport des intégrales de (1), on aura les égalités

$$\sum \alpha_i = 2q + p - 2, \tag{5}$$

ou bien

$$q = 1, \qquad p = 0. \tag{5'}$$

Le type sera alors *elliptique.*

Voici d'ailleurs l'énumération des types elliptiques: (¹)

$$q = 1 \qquad p = 0$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{3}$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{4} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{4}$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{6}$$

$$q = 0 \qquad p = 4 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}.$$

Supposons enfin que x soit fonction rationnelle de z, on aura les inégalités

$$(6) \qquad \sum \alpha_i > 2q + p - 2,$$

l'hypothèse $p = q = 0$ devant être rejetée.

Le type est alors *rationnel.* Voici l'énumération des types rationnels, d'ailleurs bien connus:

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{n}$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{3}$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{4}$$

$$q = 0 \qquad p = 3 \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_3 = \frac{1}{5}.$$

Cela posé, les équations d'un même type dépendent d'un certain nombre P de paramètres arbitraires, de telle sorte que ce type se compose de ∞^P équations distinctes.

(¹) Si $q = 0$, on ne peut supposer $p = 0$ ni $p = 1$. Si on suppose $p = 2$, on est amené à l'équation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{Av}{(x-a)^2}.$$

Ces P paramètres étant complexes, correspondent à $2P$ paramètres réels. Or le nombre de ces paramètres réels est précisément celui des conditions transcendantes auxquelles doit satisfaire l'équation (1) (qui est supposée appartenir au type donné) pour que x soit fonction fuchsienne de z (ou bien fonction doublement périodique, ou rationnelle dans le cas d'un type elliptique ou rationnel).

(Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* Acta Mathematica, T. 1, p. 234, 257, 262 et 272.)

Si au lieu de conditions transcendantes, il s'agissait de conditions algébriques, on pourrait conclure de là que parmi les équations d'un même type, il y en a toujours une qui est fuchsienne. Mais ici cette conclusion n'est pas légitime et une démonstration spéciale est nécessaire. C'est cette démonstration qui fait l'objet principal du problème qui nous occupe.

Il est aisé d'en comprendre l'importance.

Supposons en effet que l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \qquad\qquad (2) \qquad \psi(x, y) = 0$$

soit fuchsienne. Soient

$$(x = a_1, \ y = b_1), \ (x = a_2, \ y = b_2), \ \ldots, \ (x = a_p, \ y = b_p)$$

les points singuliers de l'équation (1) et $\frac{1}{k_i}$ la différence des racines de l'équation déterminante relative au point (a_i, b_i). k_i sera un nombre entier positif ou bien infini.

Considérons une fonction de x et de y n'admettant d'autres points singuliers que les points

$$(a_1, b_1), \ (a_2, b_2), \ \ldots, \ (a_p, b_p)$$

et cela de telle façon qu'elle revienne à sa valeur primitive quand le point analytique (x, y) a décrit k_i tours autour du point singulier (a_i, b_i). Cette dernière condition doit être supprimée quand $k_i = \infty$.

Cette fonction sera uniforme en z.

Il en sera ainsi des intégrales de l'équation:

$$(7) \qquad \frac{d\,w}{dx^q} = \sum \varphi_k(x, y)\frac{d^k w}{dx^k}$$

si les fonctions φ_k sont rationnelles en x et y et s'il n'y a d'autres points singuliers que

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$$

de telle sorte que toutes les racines de l'équation déterminante relative au point (a_i, b_i) soient des multiples de $\frac{1}{k_i}$ (cette dernière condition étant supprimée quand $k_i = \infty$).

Il en sera de même de toute fonction rationnelle de x et de y et d'un grand nombre de fonctions algébriques.

Par conséquent, si on démontre que dans tout type fuchsien il y a une équation fuchsienne, on aura fait voir:

1°. Qu'étant donnée une équation linéaire quelconque à coëfficients algébriques, la variable et les intégrales peuvent s'exprimer en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire z.

2°. Qu'étant donnée une courbe algébrique quelconque, les coordonnées x et y d'un point de cette courbe s'expriment en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire z.

§ 6. *Subordination des types.*

Considérons deux équations normales:

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v$$

$$(1') \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v.$$

Les coëfficients φ et φ_1 sont des fonctions rationnelles de deux variables x et y qui sont liées entre elles par une relation algébrique

$$(2) \qquad \psi(x, y) = 0$$

que *je suppose être la même pour les deux équations* (1) *et* (1').

Je suppose que l'équation (1) admette p points singuliers:

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_p, b_p)$$

de telle façon que la différence des racines de l'équation déterminante relative à (a_i, b_i) soit $\frac{1}{k_i}$.

Je suppose que l'équation (1') admette les mêmes points singuliers (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_p, b_p) que l'équation (1) et en outre q autres points singuliers:

$$(a_{p+1}, b_{p+1}), (a_{p+2}, b_{p+2}), \ldots, (a_{p+q}, b_{p+q})$$

et cela de telle sorte que la différence des racines de l'équation déterminante relative à (a_i, b_i) soit $\frac{1}{N_i}$.

Je suppose enfin que N_1 soit divisible par k_1, N_2 par k_2, ..., N_p par k_p. Si k_i est infini, N_i devra être aussi infini. Si $N_i = \infty$, la condition de divisibilité sera regardée comme remplie, quel que soit k_i.

Je dirai alors que le type dont fait partie l'équation (1') est subordonné au type dont fait partie l'équation (1).

Soit un type fuchsien T' subordonné à un autre type fuchsien T. Je suppose que chacun d'eux contienne une équation fuchsienne; le premier l'équation E' et le second l'équation E. Soit z le rapport des intégrales de l'équation E' et t celui des intégrales de l'équation E. Il est aisé de voir que t est une fonction uniforme de z. Cette fonction n'existe évidemment que quand z est intérieur au cercle fondamental. De son côté t ne peut prendre aucune valeur extérieure à ce cercle; t prend au contraire une infinité de fois toute valeur intérieure au cercle fondamental.

Soient encore (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_p, b_p) les points singuliers du type T et $\frac{1}{k_i}$ la différence des racines de l'équation déterminante relative au point (a_i, b_i). Soit F une fonction du point analytique (x, y) qui ne présente d'autre point singulier que les points (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_p, b_p) et de telle façon qu'après k_i tours autour du point (a_i, b_i) la fonction reprenne sa valeur primitive. F sera par exemple une intégrale de l'équation linéaire (7) du paragraphe précédent. F sera une fonction uniforme de t et par conséquent de z.

Mais supposons qu'on ne sache pas si le type T contient une équation fuchsienne, qu'on ne puisse pas, par conséquent, démontrer l'existence de t, mais qu'au contraire on sache que T' contient une équation fuchsienne

et que la fonction z existe. Il est aisé de voir que F est encore une fonction uniforme de z.

Ainsi pour démontrer le résultat suivant: *Les intégrales d'une équation linéaire à coëfficients rationnels en x et y peuvent s'exprimer ainsi que x et y en fonctions uniformes d'une même variable auxiliaire,* il n'est pas nécessaire de faire voir que tout type fuchsien contient une équation fuchsienne; il suffit de montrer que parmi les types subordonnés à un type fuchsien donné, il en est toujours un qui contient une équation fuchsienne.

De là l'importance de cette notion de la subordination des types.

En particulier, considérons une équation E à coëfficients rationnels et soient

$$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n$$

ses points singuliers. Soit k_i un nombre entier tel que toutes les racines de l'équation déterminante relative au point a_i soient des multiples de $\frac{1}{k_i}$. S'il n'existe pas de pareil nombre entier, on fera $k_i = \infty$.

Au lieu d'envisager le type T qui admet les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de telle façon que les différences des racines des équations déterminantes soient $\frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \ldots, \frac{1}{k_n}$, on pourra envisager un type T' subordonné à T. On supposera par exemple que T' admette outre les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, p autres points singuliers quelconques $b_1, b_2, \ldots, b_p$, et que chacune des $p + n$ équations déterminantes correspondant à ces divers points singuliers ait une racine double.

Supposons que ce type T' contienne une équation fuchsienne E'; alors x sera une fonction fuchsienne du rapport z des intégrales de cette équation. La propriété caractéristique de cette fonction fuchsienne c'est de ne pouvoir prendre aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_p$, et, si elle existe, il est évident que les intégrales de l'équation E seront des fonctions uniformes de z.

Ainsi il suffit de démontrer que l'on peut toujours trouver une fonction fuchsienne qui ne puisse pas prendre n valeurs données $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pour faire voir que toutes les équations linéaires à coëfficients rationnels peuvent s'intégrer en n'employant que certaines fonctions uniformes que je me réserve d'ailleurs d'étudier dans un mémoire ultérieur.

Il en est de même des équations à coëfficients algébriques, car on sait que l'intégration d'une équation à coëfficients algébriques se ramène à celle d'une équation d'ordre plus élevé à coefficients rationnels.

§ 7. *Lemme fondamental.*

Aucun type fuchsien ne peut contenir plusieurs équations fuchsiennes distinctes.

Supposons en effet qu'un type T contienne deux équations fuchsiennes E et E'; soit z le rapport de deux intégrales u_1 et u_2 de l'équation E; soit t le rapport de deux intégrales u'_1 et u'_2 de l'équation E'.

On sait que z ne peut prendre d'autres valeurs que celles qui sont intérieures à un certain cercle fondamental. On peut toujours choisir les intégrales u_1, u_2, u'_1 et u'_2 de telle façon: 1° que le cercle fondamental relatif à z, de même que le cercle fondamental relatif à t, ait pour centre le point 0 et pour rayon l'unité; 2° que les deux variables z et t s'annullent en même temps, pour $x = a$ par exemple; 3° que pour une autre valeur de x, pour $x = b$, l'argument de z soit égal à celui de t.

Il est clair que z sera fonction uniforme de t, et réciproquement que t sera fonction uniforme de z. Il résulte alors des hypothèses faites plus haut que $\frac{t}{z}$ considéré, soit comme fonction de z, soit comme fonction de t, n'existe pas à l'extérieur du cercle fondamental et qu'à l'intérieur de ce cercle, ce rapport reste holomorphe et ne peut s'annuller.

Considérons par exemple $\frac{t}{z}$ comme fonction de z. Posons:

$$z = \xi + i\eta$$

$$u = \log \operatorname{mod} \frac{t}{z};$$

u sera une fonction de ξ et de η, holomorphe à l'intérieur du cercle fondamental et satisfaisant à l'équation:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{d^2u}{d\eta^2} = 0. \tag{1}$$

Considérons dans le plan des z un cercle C concentrique au cercle fondamental et ayant pour rayon $r < 1$.

Le long de ce cercle, t est constamment de module inférieur à l'unité, et par conséquent on a:

$$(2) \qquad u < \log \operatorname{mod} \frac{1}{r}.$$

Mais toute fonction holomorphe satisfaisant à l'équation (1) ne peut devenir, à l'intérieur d'un contour quelconque, supérieure à la plus grande des valeurs qu'elle prend le long de ce contour. L'inégalité (2) subsiste donc pour tous les points intérieurs au cercle C.

Mais je puis prendre le rayon de ce cercle C aussi voisin que je veux de l'unité. Quand je fais tendre r vers l'unité, le second membre de l'inégalité (2) tend vers 0. Il résulte de là qu'à l'intérieur du cercle fondamental, u ne peut prendre aucune valeur positive; d'où:

$$\operatorname{mod} \frac{t}{z} \leqq 1.$$

Or rien ne distingue t de z; on peut donc écrire aussi:

$$\operatorname{mod} \frac{z}{t} \leqq 1$$

d'où

$$\operatorname{mod} z = \operatorname{mod} t$$

d'où

$$t = z e^{i\theta}$$

θ étant une constante.

Mais, par hypothèse, t et z ont même argument pour $z = b$; on a donc

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad t = z.$$

Ainsi les deux équations E et E' ne sont pas distinctes.

C. Q. F. D.

Ce lemme important a été énoncé d'abord par moi dans une communication faite à l'Académie des Sciences de Paris (17 Octobre 1881, Comptes Rendus, T. 93, page 582). Il l'a été depuis par M. Klein

(Mathematische Annalen, Bd XXI, p. 209). M. Klein l'étendait d'ailleurs au cas des fonctions qui existent dans un domaine limité par une infinité de cercles. (Cf. *Mémoire sur les groupes kleinéens*, § 9, Acta Mathematica, T. 3, p. 83). Mais je ne dirai rien ici de cette extension qui ne me serait pas utile pour mon objet.

§ 8. *Premier aperçu de la méthode de continuité.*

M. Klein et moi, nous avons été conduits indépendamment l'un de l'autre à une méthode qui permet de démontrer que tout type fuchsien contient une équation fuchsienne et que l'on peut appeler méthode de continuité. Nous avons fait de cette méthode différentes applications. (Voir Comptes Rendus, T. 92, p. 1200 et 1486; Klein, Mathematische Annalen, Bd XIX p. 565, XX p. 49, et XXI p. 211; Poincaré, Comptes Rendus, T. 94, p. 1038.) Voici quels sont les principes fondamentaux de cette méthode.

Supposons d'abord une variable réelle x et une fonction réelle y de cette variable; je suppose que pour toutes les valeurs finies ou infinies de x, il y ait une valeur de y et une seule, et que cette valeur soit une fonction analytique de x, (holomorphe ou méromorphe); que y ne puisse pas reprendre deux fois la même valeur. On pourra évidemment en conclure que y prend une fois et une seule toutes les valeurs possibles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Supposons au contraire que la variable x, par sa nature même, ne puisse varier qu'entre deux limites a et b; que pour toutes les valeurs comprises entre a et b, on sache que y est une fonction analytique de x, mais que pour ces limites elles-mêmes, on ne sache rien; que y ne puisse jamais reprendre deux fois la même valeur. Quand x tendra vers a, y tendra vers une certaine limite A et quand x tendra vers b, y tendra vers B. On sait alors seulement que y est constamment croissant ou décroissant et peut prendre toutes les valeurs intermédiaires entre A et B.

Au lieu d'une seule variable indépendante, considérons-en n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et n fonctions réelles de ces n variables, $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Je suppose que pour toutes les valeurs des x, les y soient des fonctions analytiques et que ces fonctions ne puissent jamais reprendre deux fois le même système

de valeurs. Cela suffit pour que l'on soit certain que les y peuvent prendre tous les systèmes de valeurs possibles. Soit en particulier $n = 2$. Regardons x_1 et x_2 comme définissant la position d'un point sur une sphère S; y_1 et y_2 comme définissant la position d'un point sur une sphère S'. À chaque point de la sphère S correspond un point et un seul de la sphère S' et à aucun point de S' ne peut correspondre plus d'un point de S. Cela suffit pour qu'à tout point de S' corresponde un point de S.

Il en est encore de même si S et S' au lieu d'être deux sphères sont deux surfaces fermées quelconques. Mais supposons maintenant que S n'est pas une surface fermée, mais une surface ouverte, présentant une sorte de bord, de frontière. Supposons que les coordonnées de chaque point m' de S' soient des fonctions analytiques des coordonnées du point correspondant m de S, lorsque ce point m n'est pas sur le bord de cette surface, mais que nous ne sachions rien lorsque le point m vient sur le bord de S. Il ne sera pas possible alors de conclure des hypothèses faites plus haut qu'à tout point de S' correspond un point de S.

La même chose arrivera, lorsque S et S' seront regardées comme des surfaces situées dans l'espace à plus de trois dimensions, seront des *Mannigfaltigkeiten* (multiplicités) à plus de deux dimensions, comme disent les Allemands.

Supposons toujours qu'à tout point m de S corresponde un point m' et un seul de S' de telle façon que les coordonnées de m' soient des fonctions analytiques de celles de m, à moins que m ne vienne sur le bord de la multiplicité S, dans le cas où cette multiplicité en aurait un. Supposons qu'à aucun point de S' ne puisse correspondre plus d'un point de S. Si S est une *multiplicité fermée* nous serons certains qu'à tout point de S' correspondra un point de S. Si au contraire S est une *multiplicité ouverte* présentant un *bord,* une *frontière,* nous ne pouvons rien affirmer.

Appliquons maintenant ce qui précède au problème qui nous occupe.

Nous dirons que deux types:

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \qquad\qquad (2) \qquad \psi(x, y) = 0$$

$$(1') \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi_1(x, y)v \qquad\qquad (2') \qquad \psi_1(x, y) = 0$$

appartiennent à la même classe lorsque les deux relations (2) et (2′) seront de même genre, et lorsque les deux équations (1) et (1′) auront le même nombre de points singuliers, de telle façon que ces points singuliers se correspondent chacun à chacun et que les équations déterminantes relatives à deux points singuliers correspondants soient les mêmes.

Cela posé, à chaque type d'une même classe C', nous ferons correspondre un point d'une certaine multiplicité S'.

De même nous dirons que deux groupes fuchsiens (des 1ère et 2e ou 6e familles) appartiennent à une même classe lorsque le polygone générateur aura le même nombre de côtés, et lorsque les sommets se répartiront en un même nombre de cycles, de telle façon que ces cycles se correspondent chacun à chacun et que la somme des angles de deux cycles correspondants soit la même.

À chaque classe C' de types correspond une classe C de groupes, de telle façon que si une équation fuchsienne appartient à la classe C', son groupe appartienne à la classe C.

À chaque groupe de la classe C, faisons correspondre un point d'une multiplicité S.

À chaque point de S correspondra un point et un seul de S'; il suffit pour le voir de se reporter à la théorie des fonctions fuchsiennes qui montre qu'à chaque groupe fuchsien correspond une équation fuchsienne.

De plus, en vertu du lemme fondamental, à aucun point de S' ne peut correspondre plus d'un point de S.

Il resterait à faire voir qu'à tout point de S' correspond un point de S.

Pour cela, d'après ce qui précède, il suffit que S soit une multiplicité *fermée*, qu'elle n'ait pas de *bord*. *Cela n'est nullement évident a priori.*

En effet, parmi les groupes d'une classe, il y en a une infinité qui pourraient être des *groupes limites*, correspondant à des points du *bord* de la multiplicité S. Ce sont les groupes dont le polygone générateur présente un ou plusieurs côtés infinitésimaux. On voit en effet qu'on peut toujours construire un polygone générateur dont un des côtés soit aussi petit que l'on veut. Cela ne suffit pas d'ailleurs pour que S soit une multiplicité ouverte; car, en vertu du § 9 du *Mémoire sur les groupes fuchsiens*, un même groupe peut être engendré par une infinité de polygones équivalents et il est possible que parmi ces polygones, on

puisse toujours en choisir un dont tous les côtés soient supérieurs à une limite donnée.

Ainsi, il n'est pas évident que S est une multiplicité fermée et il est nécessaire de le démontrer, par une discussion spéciale à chaque cas particulier, avant d'affirmer qu'à tout point de S' correspond un point de S. C'est ce que M. Klein a négligé de faire. *Il y a là une difficulté dont on ne peut triompher en quelques lignes.*

§ 9. *Deuxième lemme.*

Supposons que nous fassions varier notre polygone R_0 d'une façon continue et de telle manière que les éléments de ce polygone soient des fonctions continues d'un certain paramètre t. Envisageons maintenant l'équation fuchsienne que l'on peut former à l'aide de R_0 et le type T auquel appartient cette équation. Soit:

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \qquad\qquad (2) \qquad \psi(x, y) = 0 \text{ (de genre } p)$$

cette équation fuchsienne. Le type T sera défini quand on connaîtra les $3p - 3$ modules de la relation (2) et les points singuliers de l'équation (1); ces quantités s'appelleront les paramètres du type.

J'ai fait voir au § 1 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* que les fonctions θ que l'on peut former à l'aide de R_0 sont des fonctions continues de t et l'on peut en conclure que les paramètres du type T sont aussi des fonctions continues de t, ce qui est fort important au point de vue de l'application de la méthode de continuité.

Je vais pousser la chose plus loin. Je suppose que lorsque t tend vers 0, deux ou plusieurs côtés décroissent indéfiniment. (Il s'agit ici de leur longueur géométrique et non de leur L.) Je supposerai par exemple que deux côtés conjugués, ou que $2q$ côtés, conjugués deux à deux, deviennent infiniment petits, de telle façon que ceux des côtés de R_0 qui restent finis soient encore conjugués deux à deux. R_0 est alors un de ces polygones limites que nous étudierons en détail un peu plus loin.

Passons à la limite, et faisons $t = 0$, de telle façon que les $2q$ côtés infinitésimaux de R_0 s'annullent absolument et que R_0 se réduise par

conséquent à un autre polygone R'_0 n'ayant que $2n - 2q$ côtés conjugués deux à deux. Considérons le groupe G engendré par R_0. À chaque paire de côtés conjugués de R_0 correspond une substitution de G, c'est celle qui change l'un de ces deux côtés en son conjugué, et le groupe G est précisément dérivé des n substitutions qui correspondent ainsi aux divers côtés de R_0. Parmi ces substitutions nous en distinguerons $n - q$ qui correspondront aux $n - q$ paires de côtés de R_0 qui restent finis. Le groupe dérivé de ces $n - q$ substitutions s'appellera G'' et sera contenu dans G. Soit G' le groupe engendré par R'_0; il sera isomorphe à G'' puisqu'à chacun des côtés *finis* de R_0 correspond un côté de R'_0. Lorsque t tend vers o, le transformé de R_0 par une substitution quelconque de G'', tend vers le transformé de R'_0 par la substitution correspondante de G'.

Nous appellerons A la portion du cercle fondamental qui est occupée par les transformés de R_0 par les substitutions de G'' et B celle qui est occupée par les transformés de R_0 par les substitutions de G qui n'appartiennent pas à G''.

Le polygone R_0 est par hypothèse de la 1ère famille, ou du 1er ordre de la 2e ou de la 6e familles; à la limite, le polygone R'_0 appartiendra à la 2e ou à la 6e familles, mais il pourra appartenir au 1er ou au 2d ordre de ces familles, c'est à dire qu'il pourra ne pas admettre ou admettre des cycles hyperboliques.

Dans le premier cas, R_0 sera de la 1ère catégorie, dans le second de la 2e catégorie.

Dans le premier cas, les transformés de R'_0 par les substitutions de G' remplissent tout le cercle fondamental (cf. *Mémoire sur les groupes fuchsiens* § 6). Par conséquent, lorsque t tendra vers o, la superficie totale de B tendra vers o, et en même temps la plus petite distance de B à l'origine tendra vers 1, c'est à dire vers le rayon du cercle fondamental.

Dans le second cas, ce sera l'inverse et la superficie de B ne tendra pas vers o.

Supposons donc que R_0 soit de la 1ère catégorie. Dans ce cas R'_0 engendrera une équation fuchsienne

$$(1') \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi'(x, y)v \qquad\qquad (2') \qquad \psi'(x, y) = 0\,.$$

qui appartiendra à un type T' moins compliqué que T. Supposons pour

fixer les idées $q = 1$. Dans ce cas R'_0 aura deux côtés de moins que R_0. Il arrivera alors, ou bien que l'équation (1') aura un point singulier de moins que l'équation (1), ou bien que la relation (2') sera de genre $p - 1$ au lieu d'être de genre p et que l'équation (1') admettra deux points singuliers de plus que l'équation (1). (Vide infra page 262.)

Supposons par exemple, pour fixer les idées que ce soit le premier cas qui se présente. Je dis que les modules de la relation (2) vont tendre vers ceux de la relation (2') et que les points singuliers de l'équation (1) vont tendre vers ceux de l'équation (1') de telle façon que parmi les points singuliers de l'équation (1) il y en ait deux qui tendent vers un seul et même point singulier de l'équation (1').

Je vais montrer d'abord que les fonctions thétafuchsiennes engendrées par R_0 tendent vers celles qui sont engendrées par R'_0.

Considérons les séries:

$$\theta(z, H) = \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

$$\theta'(z, H) = \sum H\left(\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)(\gamma'_i z + \delta'_i)^{-2m}$$

où H est l'algorithme d'une fonction rationnelle quelconque et où $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ et $\left(z, \frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}\right)$ désignent respectivement une substitution quelconque du groupe G et du groupe G'. Je dis que

$$\lim_{t=0} \theta(z) = \theta'(z).$$

On peut trouver un contour C entourant le point z et assez petit pour qu'il soit intérieur à R_0 et à R'_0 et qu'il reste intérieur à R_0 pour toutes les valeurs suffisamment petites de t. On appellera σ la S de ce contour, λ la L du plus grand arc de cercle orthogonal au cercle fondamental qui puisse être tracé à l'intérieur de C; on appellera r une quantité quelconque, A la L de la droite oz et on posera comme dans le § 1 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (Acta Mathematica, T. 1, p. 206)

$$K = \frac{\pi}{4\sigma}(e^{2A} + e^{-2A} + 2)^m e^{2\lambda + 2mr}.$$

Appelons S_n et S''_n la somme des termes des séries θ et θ' qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ et $\frac{\alpha'_i z + \beta'_i}{\gamma'_i z + \delta'_i}$ situés à l'intérieur du cercle M dont le centre est l'origine et dont le R est $(n - 1)r$. Soit:

$$\theta = S_n + R_n, \qquad \theta' = S'_n + R'_n.$$

Soit h la plus grande valeur que puisse prendre le module de H pour des transformés du point z; nous aurons:

$$\operatorname{mod} R_n < \frac{Khe^{n(1-m)r}}{1 - e^{(1-m)r}}, \qquad \operatorname{mod} R'_n < \frac{Khe^{n(1-m)r}}{1 - e^{(1-m)r}}.$$

Nous pourrons donc prendre n assez grand pour que:

$$\operatorname{mod} R_n < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \operatorname{mod} R'_n < \frac{\varepsilon}{3}$$

ε étant une quantité donnée.

Le nombre n est désormais fixe et par conséquent le cercle M.

Nous pourrons maintenant prendre τ assez petit pour que t variant de τ à 0, aucun des transformés de z ne sorte du cercle M ou n'entre dans ce cercle et pour que les divers transformés de z par les substitutions de G qui n'appartiennent pas à G'' soient tous extérieurs à ce cercle.

Alors t variant de τ à 0, S_n sera une fonction continue de t puisque c'est une somme d'un nombre fini de fonctions continues de t; pour $t = 0$, S_n se réduira à S''_n; on pourra donc prendre t assez petit pour que:

$$\operatorname{mod}(S''_n - S_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On aura alors:

$$\operatorname{mod}(\theta - \theta') < \varepsilon$$

quelque petit que soit ε.

C. Q. F. D.

Les fonctions fuchsiennes x et y qui entrent dans l'équation (1) peuvent être choisies arbitrairement; nous poserons

$$x = \frac{\theta(z,\ H)}{\theta(z,\ H_1)}, \qquad y = \frac{\theta(z,\ H_2)}{\theta(z,\ H_1)}$$

H, H_1 et H_2 étant trois fonctions rationnelles arbitrairement choisies. Faisons de même:

$$x_1 = \frac{\theta'(z,\ H)}{\theta'(z,\ H_1)}, \qquad y_1 = \frac{\theta'(z,\ H_2)}{\theta'(z,\ H_1)}$$

il viendra

$$x_1 = \lim_{t=0} x, \qquad y_1 = \lim_{t=0} y.$$

On voit donc qu'à la limite, la relation qui lie x et y se réduira à celle qui lie x_1 et y_1 et que par conséquent les modules de la relation (2) se réduisent à ceux de la relation (2').

De même nous aurons:

$$\lim\left[\frac{1}{2}\frac{x'''x'}{(x')^4} - \frac{3}{4}\frac{(x'')^2}{(x')^4}\right] = \frac{1}{2}\frac{x_1'''x_1'}{(x_1')^4} - \frac{3}{4}\frac{(x_1'')^2}{(x_1')^4}$$

x', x'', ... désignant les dérivées première, seconde, ... de x par rapport à z.

Il résulte de là:

$$\lim \varphi(x,\ y) = \varphi'(x_1,\ y_1)$$

et par conséquent les points singuliers de l'équation (1) tendront vers ceux de (1').

C. Q. F. D.

Rien de tout cela ne reste vrai si le polygone R_0 est de la 2e catégorie.

Dans le cas où le polygone R_0 est symétrique, la chose peut se démontrer d'une manière toute différente.

Supposons par exemple un quadrilatère curviligne $\alpha\beta\gamma\delta$, dont les côtés soient des arcs de cercle orthogonaux au cercle fondamental, et dont les angles soient des parties aliquotes de π; je les appelle α, β, γ, δ. Si nous prenons le symétrique de ce quadrilatère par rapport au côté $\beta\gamma$, nous obtiendrons, en adjoignant ces deux quadrilatères l'un à l'autre, un hexagone qui engendrera un système de fonctions fuchsiennes. Mais on peut aussi engendrer ces mêmes fonctions en cherchant à faire la représentation conforme du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ sur un cercle de centre o et de

rayon 1. Si z est un point intérieur au quadrilatère et x le point correspondant du cercle, x est une fonction fuchsienne de z.

Supposons maintenant que le côté $\gamma\delta$ devienne infiniment petit, puis s'annulle, le quadrilatère se réduira à un triangle $\alpha\beta\gamma$, dont le sommet γ sera sur le cercle fondamental et de telle façon que l'angle $\alpha\gamma\beta$ soit nul. Considérons donc le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$; je suppose que le côté $\gamma\delta$ soit déjà très petit, mais ne soit pas encore nul. On peut mener une infinité de cercles $\beta_i\gamma_i$ tangents en γ_i au cercle $\beta\gamma$ et coupant en β_i le cercle $\alpha\beta$ sous un angle égal à β. Menons un de ces cercles $\beta_1\gamma_1$, de telle façon que le triangle $\alpha\beta_1\gamma_1$ soit tout entier intérieur au quadrilatère, mais soit d'ailleurs aussi grand que possible. Menons encore un autre de ces cercles $\beta_2\gamma_2$, de telle façon que le quadrilatère soit tout entier intérieur au triangle $\alpha\beta_2\gamma_2$, mais que ce triangle soit d'ailleurs aussi petit que possible.

Soit z_0 un point intérieur à $\alpha\beta_1\gamma_1$. Supposons qu'on fasse sur le cercle de rayon 1 et de centre 0, la représentation conforme de $\alpha\beta_1\gamma_1$, puis de $\alpha\beta\gamma\delta$, puis de $\alpha\beta_2\gamma_2$, de telle façon qu'au point z_0 corresponde le centre 0. Soient respectivement x_1, x et x_2 les points du cercle qui correspondent à un point z de $\alpha\beta_1\gamma_1$, ou de $\alpha\beta\gamma\delta$, ou de $\alpha\beta_2\gamma_2$. On aura:

$$\operatorname{mod} x_1 > \operatorname{mod} x > \operatorname{mod} x_2.$$

Lorsque le côté $\gamma\delta$ s'annullera tout à fait les deux triangles $\alpha\beta_1\gamma_1$ et $\alpha\beta_2\gamma_2$ se confondront et il est aisé de montrer qu'on aura:

$$\lim \operatorname{mod} x_1 = \lim \operatorname{mod} x_2$$

d'où

$$\lim \operatorname{mod} x_1 = \lim \operatorname{mod} x$$

$$\lim x_1 = \lim x.$$

C. Q. F. D.

Cette démonstration dont je n'ai d'ailleurs donné qu'un aperçu ne s'appliquerait pas au cas où R_0 ne serait pas symétrique.

§ 10. *Types symétriques.*

Je vais appliquer d'abord à un cas simple la méthode de continuité. Soit:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v$$

une équation telle que φ soit rationnel en x, que les points singuliers soient tous réels et que l'équation déterminante relative à chacun d'eux ait une racine double. Le type T dont fait partie cette équation sera dit symétrique, parce que si ce type contient une équation fuchsienne, le polygone générateur correspondant est symétrique.

Je dis que tout type symétrique contient une équation fuchsienne.

Si le nombre des points singuliers est égal à 3, on peut toujours, par un changement linéaire de variable, supposer que ces points sont précisément 0, 1 et ∞; alors on sait qu'il existe une équation fuchsienne dans le type T, car cette équation est précisément celle qui définit le carré du module d'une transcendante elliptique en fonction du rapport des périodes.

Supposons maintenant que le type T admette 4 points singuliers; on peut toujours par un changement linéaire de variable supposer que ces quatre points sont

$$0, \ 1, \ a \text{ et } \infty$$

a étant une quantité réelle positive plus grande que 1.

Soient maintenant α, β, γ, δ quatre points situés sur le cercle fondamental, et je suppose qu'en parcourant ce cercle, on les rencontre précisément dans l'ordre α, β, γ, δ. Décrivons quatre cercles, orthogonaux au cercle fondamental, et passant respectivement par les points α et β, β et γ, γ et δ, δ et α. Nous aurons ainsi un certain quadrilatère. Construisons le quadrilatère symétrique du premier par rapport au cercle $\delta\alpha$ par exemple; l'ensemble de ces deux quadrilatères formera un polygone R_0 qui engendrera un groupe fuchsien symétrique de genre 0 et de la 2e famille que j'appelle G.

Formons les fonctions fuchsiennes correspondantes et en particulier la fonction:

$$x = f(z)$$

à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Pour achever de définir cette dernière fonction nous écrirons:

$$f(\alpha) = 0, \qquad f(\beta) = 1, \qquad f(\delta) = \infty$$

et nous poserons:

$$f(\gamma) = c.$$

c sera réel positif et plus grand que 1. Alors z sera défini en fonction de x comme le rapport de deux intégrales de l'équation fuchsienne:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v$$

où φ est rationnel en x, où les points singuliers seront 0, 1, c et ∞ et de telle sorte que chaque équation déterminante ait une racine double.

Pour faire voir que T contient une équation fuchsienne, il suffit donc de montrer qu'on peut choisir α, β, γ, δ de telle sorte que

$$c = a.$$

Supposons donc que les points α, β, δ restent fixes et qu'on fasse décrire au point γ, l'arc $\beta\delta$ du cercle fondamental, depuis le point β jusqu'au point δ.

Voici ce qui se passera:

1°. Les séries thétafuchsiennes définies au § 1 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* seront des fonctions continues de γ, car elles sont uniformément convergentes, comme je l'ai fait voir dans ce paragraphe.

2°. Il en sera donc de même des fonctions fuchsiennes elles-mêmes et par conséquent de c.

3°. En vertu du lemme fondamental, c ne pourra prendre deux fois la même valeur.

4°. Lorsque le point γ se rapprochera indéfiniment du point β, le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ se réduira au triangle $\alpha\beta\delta$, et le polygone R_0 se réduira au quadrilatère R'_0 formé de ce triangle et du triangle symétrique par

rapport au cercle $\alpha\delta$. Le second lemme nous apprend donc que c tendra vers l'unité.

5°. Pour la même raison quand γ tendra vers δ, c tendra vers l'infini.

En résumé, quand γ variera en suivant le cercle fondamental depuis β jusqu'à δ, c croîtra d'une façon continue depuis 1 jusqu'à l'infini. c prendra donc la valeur a qui est comprise entre 1 et l'infini.

C. Q. F. D.

Supposons maintenant un type T admettant non plus 4, mais 5 points singuliers. On pourra toujours supposer par un changement linéaire de variables que ces 5 points singuliers sont:

$$0, \ 1, \ a, \ b, \ \infty$$

avec les inégalités

$$1 < a < b \tag{1}$$

a et b étant des quantités réelles.

Si nous regardons a et b comme les coordonnées d'un point dans le plan, nous verrons qu'à chaque type T correspond un point d'une région plane limitée par les deux droites $a = 1$, $a = b$ et par la droite $b = \infty$. Cette région n'est autre chose que la multiplicité S' définie dans le paragraphe 8. On voit qu'avec notre manière de considérer les choses, cette multiplicité est *ouverte*.

Prenons maintenant sur le cercle fondamental cinq points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ se succédant sur ce cercle précisément dans cet ordre. Il en résulte que l'on a:

$$\arg\alpha > \arg\beta > \arg\gamma > \arg\delta > \arg\varepsilon.$$

Construisons le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, puis le pentagone symétrique par rapport au côté $\alpha\varepsilon$ et nous aurons un polygone R_0 qui engendrera un groupe fuchsien G. Parmi les fonctions fuchsiennes correspondant à ce groupe, appelons $x = f(z)$ celle à l'aide de laquelle les autres s'expriment rationnellement et qui de plus est telle que

$$f(\alpha) = 0, \qquad f(\beta) = 1, \qquad f(\varepsilon) = \infty.$$

Les quantités

$$f(\gamma) = a, \qquad f(\delta) = b$$

sont réelles positives et telles que

$$1 < a < b.$$

Lorsque $\gamma - \beta$ tendra vers 0, a tendra vers 1; lorsque $\gamma - \delta$ tendra vers 0, $a - b$ tendra vers 0; enfin lorsque $\delta - \varepsilon$ tendra vers 0, b croîtra indéfiniment. De plus lorsque α, β et ε restant fixes, on fera varier γ et δ, a et b seront des fonctions continues de γ et de δ.

Si l'on considère les arguments de γ et de δ comme les coordonnées d'un point dans un plan, ces arguments étant soumis aux inégalités:

$$\arg\beta < \arg\gamma < \arg\delta < \arg\varepsilon$$

le point correspondant sera situé à l'intérieur d'un triangle limité par les trois droites

$$\arg\beta = \arg\gamma, \qquad \arg\gamma = \arg\delta, \qquad \arg\delta = \arg\varepsilon.$$

Ce triangle ne sera autre chose que la multiplicité S qui sera ouverte comme la multiplicité S'.

Cela posé, à chaque point de S correspond un point et un seul de S'; à chaque point de S' ne peut correspondre plus d'un point de S. À chaque point de la périphérie de S correspond un point de la périphérie de S'. Il résulte de là nécessairement qu'à tout point de S' correspond un point de S.

En d'autres termes, on peut toujours choisir le pentagone $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, de telle façon que a et b aient des valeurs données, c'est à dire que tout type fuchsien symétrique n'admettant que 5 points singuliers contient une équation fuchsienne.

La démonstration est absolument la même pour un plus grand nombre de points singuliers; d'où cette conclusion:

Tout type fuchsien symétrique contient une équation fuchsienne.

On voit que dans le cas particulier des types symétriques l'application de la méthode de continuité ne présente aucune difficulté.

On peut tirer de ce qui précède une conclusion importante.

Considérons une fonction y de x, qui ne peut cesser d'être holomorphe en x que si x prend une des n valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$; supposons de plus que ces n valeurs sont réelles.

Considérons le type fuchsien symétrique qui admet les n points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Il contient une équation fuchsienne et dans cette équation la variable est une fonction fuchsienne du rapport z des intégrales:

$$x = f(z).$$

Cette fonction n'existe pas à l'extérieur du cercle fondamental; si nous supposons $a_n = \infty$ elle est holomorphe à l'intérieur de ce cercle et elle ne peut prendre aucune des valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Il résulte de là qu'à l'intérieur du cercle fondamental y est holomorphe en z.

Donc *si y est une fonction de x admettant seulement un nombre fini de points singuliers qui soient tous réels, on peut trouver une variable z telle que y et x exprimées en fonctions de z n'existent pas à l'extérieur du cercle fondamental et soient holomorphes à l'intérieur de ce cercle.*

On peut supposer en particulier que y est une fonction algébrique, ou l'intégrale d'une équation linéaire à coëfficients algébriques, telle que tous les points singuliers soient réels.

§ 11. *Généralisation du théorème précédent.*

Nous n'avons encore appliqué la méthode de continuité qu'aux types symétriques, mais avant d'aborder l'étude de types plus compliqués, nous allons tirer du résultat obtenu tout le parti possible. Soit:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v$$

une équation telle que $\varphi(x)$ soit rationnel en x, que les points singuliers soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, mais ne soient pas tous réels et que chaque équation déterminante ait une racine double.

Appelons T le type dont fait partie cette équation.

Je démontrerai plus loin que ce type contient une équation fuchsienne, mais ce n'est pas cela que j'ai en vue pour le moment; je veux faire voir qu'il y a un type subordonné à T qui contient une équation fuchsienne; en d'autres termes, qu'il existe une fonction fuchsienne, qui ne peut prendre à l'intérieur du cercle fondamental aucune des valeurs a_1, a_1, $\ldots$, a_n et qui de plus ne peut prendre non plus certaines autres valeurs b_1, b_2, $\ldots$, b_k.

Nous nous regardons donc comme libres d'adjoindre au tableau des quantités a, telles quantités qu'il nous conviendra d'y ajouter. Nous pouvons toujours supposer que si le tableau des nombres a contient une quantité imaginaire, il contient aussi sa conjuguée; car si cette conjuguée n'y était pas contenue, on l'y adjoindrait.

Je suppose que le théorème soit vrai quand le tableau des quantités a ne contient que $q - 1$ couples de valeurs imaginaires et je vais faire voir qu'il est vrai quand ce tableau contient q semblables couples. Cela suffira, car dans le paragraphe précédent, j'ai démontré le théorème pour le cas où toutes les quantités a sont réelles.

Supposons donc que le tableau des quantités a_1, a_2, $\ldots$, a_n contient $n - 2q$ quantités réelles

(1) $$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-2q}$$

et $2q$ quantités imaginaires conjuguées deux à deux

(2) $$a'_1,\ a'_2,\ \ldots,\ a'_{2q}.$$

Posons:

$$\varphi(x) = (x - a'_1)(x - a'_2)\ldots(x - a'_{2q});$$

$\varphi(x)$ sera un polynôme entier à coëfficients réels. L'équation:

$$\varphi'(x) = 0$$

aura au moins une racine réelle, et par conséquent au plus $q - 1$ couples de racines imaginaires. Soient

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2q-1}$$

les racines de cette équation. Posons:

$$n - 2q = p, \qquad 2q - 1 = m.$$

Parmi les quantités suivantes

$$(4)\qquad 0,\ \varphi(a_1),\ \varphi(a_2),\ \ldots,\ \varphi(a_p);\ \varphi(c_1),\ \varphi(c_2),\ \ldots,\ \varphi(c_m)$$

il y aura au plus $q - 1$ couples de valeurs imaginaires.

On peut donc construire une fonction fuchsienne $F(z)$ qui ne peut prendre aucune de ces valeurs puisque le théorème est supposé vrai pour un système de valeurs ne contenant que $q - 1$ couples de quantités imaginaires conjuguées.

Posons

$$\varphi(x) = F(z).$$

On voit d'abord que x est fonction uniforme de z; en effet cela ne pourrait cesser d'avoir lieu que si l'on avait:

$$\varphi'(x) = 0$$

d'où

$$x = c_i, \qquad F(z) = \varphi(c_i)$$

ce qui est impossible.

De plus x ne peut prendre aucune des valeurs

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p$$

sans quoi l'on aurait:

$$F(z) = \varphi(a_i)$$

ce qui est impossible, ni aucune des valeurs:

$$a'_1,\ a'_2,\ \ldots,\ a'_{2q}$$

sans quoi l'on aurait

$$F(z) = 0$$

ce qui est impossible.

La dérivée de x par rapport à z ne peut jamais s'annuller, sans quoi celle de F par rapport à z s'annullerait également, ce qui n'a jamais lieu.

D'ailleurs x est une fonction fuchsienne de z. En effet soit:

$$F(z) = \varphi(x) = y, \qquad v = \sqrt{\frac{dF}{dz}}$$

on aura, puisque F est une fonction fuchsienne

$$\frac{d^2v}{dy^2} = \psi(y)v$$

$\psi(y)$ étant une fonction rationnelle en y.

Si nous posons ensuite

$$w = \sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

d'où

$$v = w\sqrt{\varphi'(x)}$$

il viendra:

$$(5) \qquad \frac{d^2w}{dx^2} = \left\{[\varphi'(x)]^2\psi[\varphi(x)] + \frac{3}{4}\left[\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}\right]^2 - \frac{1}{2}\frac{\varphi'''(x)}{\varphi'(x)}\right\}w$$

où le coëfficient de w est une fonction rationnelle en x.

Ainsi x est une fonction uniforme de z, c'est à dire du rapport des deux intégrales de l'équation (5). C'est donc une fonction fuchsienne.

Ainsi x est une fonction fuchsienne qui ne peut prendre aucune des valeurs (1) et (2), mais qui de plus ne peut prendre non plus aucune des valeurs telles que $\varphi(x) = \varphi(a_i)$ ou $\varphi(x) = \varphi(c_i)$.

Appelons

$$b_1, \ b_2, \ \dots, \ b_k$$

ces valeurs.

L'équation (5) qui est une équation fuchsienne admet comme points singuliers

$$a_1, \ a_2, \ \dots, \ a_p, \ \ a'_1, \ a'_2, \ \dots, \ a'_{2q}, \ \ b_1, \ b_2, \ \dots, \ b_k$$

et de telle sorte que toutes les équations déterminantes aient une racine double. Elle appartient donc à un type subordonné à T.

Ainsi il est toujours possible de trouver une fonction fuchsienne $x = f(z)$ qui ne peut prendre n valeurs *données*

$$a_1, \ a_2, \ \dots, \ a_n$$

et qui ne peut prendre non plus k autres valeurs non données

$$b_1, \ b_2, \ \dots, \ b_k.$$

À cette fonction fuchsienne correspond une équation fuchsienne dont les points singuliers sont les a et les b et dont toutes les équations déterminantes ont une racine double. Cette équation fait partie d'un type subordonné à T.

Soit maintenant y une fonction de x qui n'admet d'autre point singulier que les a. Si on pose $x = f(z)$, y sera fonction uniforme de z. C'est ce qui arrivera en particulier lorsque y sera l'intégrale d'une équation linéaire à coëfficients algébriques.

Ainsi on peut toujours trouver une variable z, dont la variable x et les intégrales d'une pareille équation sont des fonctions uniformes.

§ 12. *Polygones limites.*

Je dirai que deux polygones générateurs R_0 et R'_0 de deux groupes fuchsiens G et G' appartiennent à une même classe lorsqu'ils satisferont aux conditions suivantes:

1°. Le nombre des côtés des deux polygones est le même.

2°. Si deux côtés de R_0 sont conjugués, les deux côtés de même rang de R'_0 sont également conjugués. Il en résulte que les sommets des deux polygones se répartissent en un même nombre de cycles de telle façon qu'à chaque cycle de R_0 corresponde un cycle de R'_0 et réciproquement.

3°. La somme des angles de deux cycles correspondants est la même.

Les polygones d'une même classe dépendent d'un certain nombre de paramètres. Supposons par exemple pour fixer les idées qu'ils soient complètement définis ([1]) lorsqu'on se donne trois paramètres x, y, z, mais que ces trois paramètres ne soient pas indépendants et soient liés entre eux par une relation

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

([1]) Il reste bien entendu que deux polygones ne sont pas distincts lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une substitution linéaire qui n'altère pas le cercle fondamental.

Si nous regardons x, y et z comme les coordonnées d'un point dans l'espace, à chaque polygone de la classe correspond un point d'une surface S_1 définie par l'égalité (1) de sorte qu'à la classe tout entière correspond cette surface ou une portion de cette surface.

Mais en général, pour que le polygone R_0 puisse être le polygone générateur d'un groupe fuchsien, x, y et z doivent satisfaire non seulement à l'égalité (1), mais encore à certaines inégalités (2). Aussi à la classe considérée correspond seulement une partie de la surface S_1 et cette partie est limitée par certaines courbes frontières dont on obtient l'équation en remplaçant dans une des inégalités (2) le signe de l'inégalité par celui de l'égalité.

Prenons un exemple. Soit un polygone R_0 de la seconde famille et du genre 0; ce sera par exemple un hexagone *abcdef*. Les côtés *ab* et *bc*, *cd* et *de*, *ef* et *fa* sont conjugués de telle sorte qu'il y a quatre cycles *b*, *d*, *f* et *ace*. Les six sommets devront satisfaire à la relation suivante:

$$-(a-b)(c-d)(e-f) = (b-c)(d-e)(f-a).$$

Soit $\varphi(\mu)$ le rapport anharmonique de μ par rapport aux trois points b, d et f de telle sorte que:

$$\varphi(b) = \infty, \qquad \varphi(d) = 0, \qquad \varphi(f) = 1.$$

Posons

$$\varphi(a) = y, \qquad \varphi(c) = x, \qquad \varphi(e) = z.$$

Le polygone R_0 sera entièrement défini quand on connaitra x, y et z; mais entre ces trois paramètres nous avons la relation suivante:

$$(1') \qquad x(1-z) = z(1-y).$$

C'est l'équation d'un paraboloïde.

Mais x, y et z doivent satisfaire en outre aux inégalités

$$(2') \qquad x < 0 < z < 1 < y$$

de sorte qu'on ne doit conserver qu'une portion du paraboloïde (1'). Cette portion doit être regardée comme limitée par les six droites suivantes

(3) $x = z = 0$

(4) $x = 0 \qquad y = 1$

(5) $y = z = 1$

(6) $z = 1 \qquad x = \infty$

(7) $x = y = \infty$

(8) $y = \infty \qquad z = 0.$

Ce seront les courbes frontières de la portion utile du paraboloïde; à chaque point de cette portion utile correspondra *un* polygone de la classe envisagée et réciproquement.

Supposons maintenant que, dans la classe considérée, il faille p paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pour définir complètement le polygone R_0 et que ces p paramètres satisfassent d'une part à une égalité (1), d'autre part à certaines inégalités (2). Si l'on regarde $x_1, x_2, \ldots, x_p$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à p dimensions, cette égalité et ces inégalités définiront une portion de surface, une multiplicité (*Mannigfaltigkeit*), comme disent les Allemands. J'appellerai M_1 cette multiplicité qui aura $p - 1$ dimensions. Elle sera en général *ouverte* et sera limitée par des multiplicités frontières de $p - 2$ dimensions, puisque les x satisfont non seulement à une égalité, mais encore à des inégalités. Ces multiplicités frontières sont analogues aux courbes frontières dont il a été parlé plus haut et on obtient leurs équations en remplaçant dans l'une des inégalités (2) le signe de l'inégalité par celui de l'égalité.

Considérons un point de la multiplicité M_1 qui soit infiniment voisin de l'une des multiplicités frontières. À ce point correspondra un polygone dont certains éléments seront infinitésimaux et que j'appellerai pour cette raison polygone limite.

Nous allons envisager d'abord une classe de polygones R_0, du genre 0, de la 2e famille; le nombre des côtés sera $2n$; chaque côté de rang impair sera le conjugué du côté dont le rang est plus élevé d'une unité (le côté de rang $2p - 1$ sera le conjugué du côté de rang $2p$). De cette façon, si je désigne par la notation α_p le sommet qui sépare les côtés de rang p et de rang $p - 1$, chaque sommet d'indice impair formera un cycle à lui tout seul, pendant que tous les sommets d'indice pair formeront

un seul cycle. Il y aura donc en tout $n+1$ cycles et tous les sommets seront d'ailleurs sur le cercle fondamental. Pour définir un pareil polygone il suffit de se donner $2n-3$ de ces sommets, les trois autres étant supposés fixes. D'ailleurs entre ces $2n-3$ paramètres nous avons la relation:

$$(1'') \quad -(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)\ldots(\alpha_{2n-1}-\alpha_{2n}) = (\alpha_{2n}-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_{2n-2}-\alpha_{2n-1})$$

outre les inégalités:

$$(2'') \qquad \arg\alpha_1 < \arg\alpha_2 < \arg\alpha_3 < \ldots < \arg\alpha_{2n} < \arg\alpha_1 + 2\pi.$$

Je considère d'autre part les fonctions fuchsiennes engendrées par R_0 et parmi elles, une de celles à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. Je l'appelle $f(z)$. Les points singuliers de l'équation fuchsienne correspondante sont alors au nombre de $n+1$; ce sont:

$$f(\alpha_1),\ f(\alpha_3),\ \ldots,\ f(\alpha_{2n-1})$$

et

$$f(\alpha_2) = f(\alpha_4) = \ldots = f(\alpha_{2n}).$$

Je vais chercher quels sont les polygones limites de la classe en question. Pour les trouver il faut dans l'une des inégalités (2″) remplacer le signe de l'inégalité par celui de l'égalité; d'où:

$$\arg\alpha_i = \arg\alpha_{i+1}; \qquad \alpha_i = \alpha_{i+1}$$

c'est à dire qu'un des côtés du polygone R_0 doit devenir infiniment petit. Mais en vertu de l'équation (1″) si un côté de rang pair devient infiniment petit, il faut qu'un côté de rang impair le devienne également, et réciproquement. Il y aura donc toujours au moins deux côtés qui s'annulleront. De là trois espèces de polygones limites.

1°. Ceux dont deux côtés conjugués s'annullent.

2°. Ceux dont deux côtés non conjugués s'annullent.

3°. Ceux dont plus de deux côtés s'annullent à la fois.

Ainsi dans le cas du paraboloïde (1′), les droites frontières (3), (5) et (7) correspondent à des polygones limites de la 1ère espèce; les droites (4), (6) et (8) à des polygones de la 2e espèce et les points:

$$x = z = 0, \quad y = 1; \qquad x = 0, \quad y = z = 1; \ \text{etc.},$$

qui appartiennent à la fois à deux de ces droites frontières correspondent à des polygones de la 3e espèce.

Les polygones limites de la 3e espèce sont évidemment des cas particuliers de ceux des deux premières. Laissons-les pour un instant de côté et cherchons à montrer que ceux de la 2e espèce se ramènent à ceux de la 1ère.

En effet si nous envisageons un polygone de la 2e espèce, l'un de ses côtés infinitésimaux sera de rang pair. Je puis supposer que l'on ait numéroté les côtés de telle façon que ce soit précisément le côté de rang 2, $\alpha_1\alpha_2$. L'autre côté infinitésimal sera par exemple $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$. Ces deux côtés seront séparés par $p - 1$ paires de côtés conjugués $\alpha_2\alpha_3$ et $\alpha_3\alpha_4$; $\alpha_4\alpha_5$ et $\alpha_5\alpha_6$; etc.; $\alpha_{2p-2}\alpha_{2p-1}$ et $\alpha_{2p-1}\alpha_{2p}$. Joignons, par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, α_{2p-1} à α_1; nous partagerons ainsi le polygone R_0 en deux autres r_0 et r'_0; r_0 contiendra par exemple le sommet α_{2p} et r'_0 le sommet α_2. Soit r''_0 le transformé de r_0 par la substitution qui change $\alpha_{2p-2}\alpha_{2p-1}$ en $\alpha_{2p}\alpha_{2p-1}$, et posons

$$R'_0 = r_0 + r''_0.$$

Le polygone R'_0 sera équivalent à R_0, il admettra deux côtés infinitésimaux, à savoir $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ et le transformé de $\alpha_1\alpha_2$. Ces deux côtés ne seront plus séparés que par $p - 2$ paires de côtés conjugués. En opérant sur R'_0 comme on a opéré sur R_0, on obtiendra un polygone R''_0 où les deux côtés infinitésimaux ne seront plus séparés que par $p - 3$ paires de côtés conjugués, et en continuant de la sorte, on finira par arriver à un polygone S_0, équivalent à R_0 et dont les deux côtés infinitésimaux seront consécutifs. Tous les polygones R_0, R'_0, R''_0, ..., S_0 auront une partie commune qui sera r_0. Le côté infinitésimal $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ et son conjugué $\alpha_{2p+1}\alpha_{2p+2}$ appartiendront donc à S_0. Le second côté infinitésimal sera par exemple $\beta\alpha_{2p}$. Joignons maintenant $\beta\alpha_{2p+1}$ par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental. Le polygone S_0 se trouvera divisé en deux parties; le triangle $\alpha_{2p}\beta\alpha_{2p+1} = s'_0$ et $s_0 = S_0 - s'_0$. Soit γ le transformé de β par la substitution qui change $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ en $\alpha_{2p+2}\alpha_{2p+1}$ et soit $\alpha_{2p+2}\gamma\alpha_{2p+1} = s''_0$ le triangle transformé de s'_0 par cette substitution. Le polygone $S'_0 = s_0 + s''_0$ sera équivalent à S_0 et il est aisé de voir qu'il n'a que deux côtés infinitésimaux, à savoir $\beta\alpha_{2p+1}$ et $\gamma\alpha_{2p+1}$ qui sont conjugués.

Il est vrai que le polygone S_0' quoique équivalent à R_0 n'appartient pas à la même classe, parce que les paires de côtés conjugués sont distribuées d'une autre manière; mais il est aisé, par des transformations convenables, de ramener le polygone S_0' à un polygone équivalent S_0'' admettant comme S_0' les côtés infinitésimaux conjugués $\beta\alpha_{2p+1}$ et $\gamma\alpha_{2p+1}$ et dont chaque côté de rang impair est conjugué du côté pair qui le suit.

Nous sommes ainsi amenés à nous occuper principalement des polygones limites de la 1ère espèce.

Considérons un pareil polygone dont les deux côtés conjugués soient $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_{2n}\alpha_1$. Nous distinguerons deux catégories de polygones de la 1ère espèce.

1°. Ceux de la 1ère catégorie seront tels que

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_{2n} - \alpha_1} = 1,$$

2° et ceux de la 2e catégorie seront tels que

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_{2n} - \alpha_1} \gtrless 1.$$

Dans le premier cas, on a entre les sommets du polygone les relations suivantes

$$(9) \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_{2n}$$

$$(1^a) \qquad -(\alpha_3 - \alpha_4)\ldots(\alpha_{2n-1} - \alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_3)\ldots(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1}).$$

Le polygone R_0 se réduit donc (lorsque passant à la limite on annulle ses côtés infinitésimaux) à un polygone R_0' tout à fait analogue, mais dont le nombre des côtés n'est plus que $2n - 2$ au lieu de $2n$.

Disons quelques mots des groupes G et G' engendrés par ces deux polygones R_0 et R_0'. Appelons S_i la substitution parabolique qui change $\alpha_{i-1}\alpha_i$ en $\alpha_{i+1}\alpha_i$ (i étant essentiellement impair). Le groupe G sera dérivé des n substitutions

$$S_1,\ S_3,\ \ldots,\ S_{2n-1}.$$

La résultante

$$S_1S_3S_5\ldots S_{2n-1}$$

sera parabolique et admettra le point double α_{2n}.

Lorsque R_0 se réduit à R'_0, les substitutions $S_3, \ldots, S_{2n-1}$ deviennent $S''_3, \ldots, S''_{2n-1}$ et restent paraboliques, mais la substitution S_1 devient illusoire et n'a plus aucun sens. Le groupe G' est donc dérivé des $n-1$ substitutions

$$S''_3, \ldots, S''_{2n-1}.$$

En vertu de la relation (1^a) la résultante

$$S''_3 \ldots S''_{2n-1}$$

est parabolique.

Donc les sommets d'ordre pair de R'_0 forment un cycle parabolique (3e sous-catégorie) et par conséquent R'_0 et ses transformés par les diverses substitutions de G' rempliront tout le cercle fondamental (cf. *Théorie des groupes fuchsiens* § 6).

Alors en appliquant le 2d lemme, on verrait que la différence

$$f(\alpha_1) - f(\alpha_2)$$

tend vers 0 et que le type T, dont fait partie l'équation fuchsienne engendrée par R_0, se réduit à un type T' plus simple n'admettant plus que n points singuliers.

Supposons maintenant que deux côtés $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_{2n}\alpha_1$ tendent vers 0 de telle façon que

$$\lim \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_{2n} - \alpha_1} \lesseqgtr 1.$$

La relation (1^a) cessera d'avoir lieu. La résultante

$$S''_3 S''_5 \ldots S''_{2n-1}$$

sera hyperbolique et non parabolique; les sommets d'ordre pair de R'_0 formeront un cycle hyperbolique (4e sous-catégorie) et par conséquent les transformés de R'_0 par les substitutions de G' ne rempliront pas tout le cercle fondamental, mais seulement une portion de cercle limitée par une infinité de circonférences. (Cf. *Théorie des groupes fuchsiens* § 6.)

Le 2d lemme n'est donc pas applicable, ce qui montre quelle différence profonde sépare les polygones limites de la 1ère et de la 2e catégories.

On pourrait faire une théorie tout à fait analogue des polygones limites de la 3e espèce qui ne sont que des cas particuliers de ceux de la 1ère et de la 2e.

Comme deuxième exemple, nous considérerons un polygone R_0 du genre 0, dont les côtés seront disposés comme dans l'exemple précédent, mais qui appartiendra à la 1ère famille et dont par conséquent tous les sommets seront à l'intérieur du cercle fondamental et tous les cycles seront elliptiques (1ère catégorie).

Nous appellerons

$$a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$$

les angles de ce polygone qui ont leurs sommets en

$$\alpha_1, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-1}$$

et b la somme des autres angles du polygone. Ces divers angles doivent être des parties aliquotes de 2π; je les regarderai comme donnés; la classe à laquelle appartient R_0 est alors parfaitement définie. Dans ce qui va suivre, nous envisagerons la L des côtés de ce polygone et non leur longueur géométrique. Dans l'exemple précédent, quand nous disions qu'un côté était infiniment petit, cela s'entendait de sa longueur; ici au contraire cela s'entendra de sa L (qui n'est autre chose que la longueur au point de vue de la géométrie non-euclidienne; cf. *Groupes fuchsiens* § 1; *Fonctions fuchsiennes* § 1).

Cela posé, comment peut-on concevoir que le polygone R_0 devienne un polygone limite? Cela pourrait se concevoir de trois manières.

1°. Si un côté devenait infiniment petit.

2°. Si un angle s'annullait.

3°. Si un côté devenait infiniment grand.

Il est aisé de voir que les deux premiers cas ne se présenteront jamais, sans que le troisième se présente également; examinons donc le troisième.

Supposons qu'un côté de R_0, $\alpha_{2n}\alpha_1$ par exemple, devienne infini; il en sera de même du conjugué $\alpha_1\alpha_2$. Mais l'angle de ces deux côtés qui est a_1 est donné et fini. Donc la diagonale $\alpha_{2n}\alpha_2$ est infinie. Mais cette diagonale est plus petite que la somme des $2n - 2$ autres côtés. Donc l'un de ces côtés est infini. Ce sera par exemple $\alpha_{2p-2}\alpha_{2p-1}$ et il en sera

de même par conséquent de son conjugué $\alpha_{2p-1}\alpha_{2p}$. Joignons par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, les deux sommets α_1, α_{2p-2}. Nous aurons ainsi divisé R_0 en deux polygones partiels: r_0 qui comprendra le sommet α_2, et r'_0 qui comprendra le sommet α_{2n}. Soit maintenant r''_0 le transformé de r_0 par la substitution qui change $\alpha_1\alpha_2$ en $\alpha_1\alpha_{2n}$. Le polygone $R'_0 = r'_0 + r''_0$ qui est équivalent à R_0 a comme lui quatre côtés infinis, mais ces quatre côtés sont consécutifs. Il résulte de là que nous pouvons toujours supposer que les 4 côtés infinis de R_0 sont $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$. C'est ce que nous ferons.

On peut supposer aussi que R_0 a plus de quatre côtés infinis; mais ce n'est qu'un cas particulier que nous laisserons de côté pour le moment; nous supposerons donc que les $2n - 4$ autres côtés sont finis. Dans ce cas, on peut démontrer sans trop de difficultés que la diagonale $\alpha_1\alpha_3$ est finie. Appelons r_0 le triangle $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et r'_0 le reste de R_0. Appelons r''_0 le triangle $\alpha_3\beta\alpha_4$ transformé de r_0 par la substitution qui change $\alpha_3\alpha_2$ en $\alpha_3\alpha_4$. Le polygone $R'_0 = r'_0 + r''_0$ sera équivalent à R_0 et il n'aura plus que deux côtés infinis $\alpha_1\alpha_{2n}$ et $\beta\alpha_4$ qui seront conjugués, pendant que les deux côtés conjugués $\alpha_1\alpha_3$ et $\alpha_3\beta$ seront finis. Ces deux derniers côtés ont leur L finie, mais leur longueur géométrique est infiniment petite. Supposons que nous passions à la limite et que ces deux côtés s'annullent. Le polygone R'_0 se réduira alors à un polygone R''_0 qui n'aura plus que $2n - 2$ côtés par suite de la confusion des trois sommets α_1, α_3 et β. Parmi ces côtés, il y en a $2n - 4$ qui ne diffèrent pas de ceux de R_0; les deux autres sont les côtés $\alpha_{2n}\alpha_1$ et $\alpha_1\alpha_4$ qui sont conjugués; le sommet α_1 qui est situé sur le cercle fondamental, forme à lui tout seul un cycle qui peut être parabolique ou hyperbolique.

S'il est parabolique, ce qui arrive lorsque le cercle qui passe par $\alpha_1\alpha_{2n}$ et α_4 est tangent au cercle fondamental, le polygone limite est de la 1ère catégorie.

S'il est au contraire hyperbolique, le polygone limite est de la 2e catégorie.

Les propriétés des deux catégories sont les mêmes que dans l'exemple précédent. Ainsi si G est le groupe engendré par R_0, ce groupe sera dérivé de n substitutions elliptiques:

$$S_1, \; S_3, \; \ldots, \; S_{2n-1}$$

de telle façon que S_i ait pour point double a_i. Le groupe dérivé de

$$S_5,\ S_7,\ \ldots,\ S_{2n-1} \quad \text{et de} \quad S_1 S_3$$

s'appellera G''. Lorsque R_0 se réduira à R_0'', les substitutions $S_5, S_7, \ldots, S_{2n-1}$ tendront vers des substitutions elliptiques $S_5', S_7', \ldots, S_{2n-1}'$ et $S_1 S_3$ tendra vers une certaine substitution Σ. S_1 et S_3 deviendront illusoires. Le groupe G' engendré par R_0'' sera dérivé de

$$S_5',\ S_7',\ \ldots,\ S_{2n-1}' \quad \text{et} \quad \Sigma$$

et sera isomorphe à G''.

Si le polygone est de la 1ère catégorie, Σ sera parabolique; les transformés de R_0'' par le groupe G' rempliront tout le cercle fondamental. Lorsque R_0' tendra vers R_0'', le transformé de R_0' par une substitution de G'' tendra vers le transformé de R_0'' par la substitution correspondante de G', et la surface recouverte par les transformés de R_0' par les substitutions de G qui n'appartiennent pas à G'', tendra vers 0. En appliquant le deuxième lemme et en conservant les mêmes notations que plus haut, on verrait que la différence $f(\alpha_1) - f(\alpha_3)$ tend en même temps vers 0.

Si au contraire le polygone est de la 2e catégorie, Σ est hyperbolique et les transformés de R_0'' ne remplissent pas tout le cercle fondamental. Les déductions précédentes ne sont donc plus possibles et l'on ne peut affirmer que $f(\alpha_1) - f(\alpha_3)$ tende vers 0.

On traiterait de même le cas où il y a plus de quatre côtés infinis.

Comme troisième exemple, nous choisirons un polygone R_0 de genre p, de la 1ère famille, de $4p$ côtés, dont les côtés opposés sont conjugués et dont tous les sommets forment un seul cycle, pendant que la somme des angles est égale à 2π.

Ici encore on pourrait concevoir trois cas où le polygone deviendrait polygone limite.

1°. Si l'un des côtés s'annullait (cela s'entend toujours de la L de ce côté).

2°. Si un angle s'annullait.

3°. Si un côté devenait infini.

Comme dans l'exemple précédent, les deux premiers cas ne se présenteront jamais sans que le troisième se présente en même temps et c'est ce troisième cas qu'il nous reste à examiner.

J'appelle comme plus haut α_i le sommet de rang i et je suppose que le côté $\alpha_{4p}\alpha_1$ et son conjugué $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ deviennent infinis. Soit β_1 le milieu de $\alpha_{4p}\alpha_1$. (J'entends par là que la L de $\alpha_{4p}\beta_1$ est égale à celle de $\beta_1\alpha_1$) et β_2 le milieu de $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$. Joignons $\beta_1\beta_2$ par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental. Ce sera une sécante de notre polygone R_0 et *cette sécante sera finie.* Cette sécante partagera le polygone R_0 en deux autres: r_0 qui contiendra le sommet α_1, et r_0' qui contiendra le sommet α_{4p}. Soit maintenant S_p la substitution qui change $\alpha_p\alpha_{p+1}$ en son conjugué $\alpha_{3p}\alpha_{3p+1}$. Cette substitution changera

$$r_0 = \beta_1\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{2p-1}\alpha_{2p}\beta_2$$

en

$$r_0'' = \beta_1'\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_{2p-1}'\alpha_{2p}'\beta_2'$$

où:

$$\alpha_p' = \alpha_{3p+1}, \qquad \alpha_{p+1}' = \alpha_{3p}.$$

Le polygone $R_0' = r_0' + r_0''$ sera équivalent à R_0; il aura $4p + 2$ sommets qui se succèderont dans l'ordre suivant:

$$\beta_1'\alpha_1'\alpha_2' \ldots \alpha_p'\alpha_{3p+2}\alpha_{3p+3} \ldots \alpha_{4p}\beta_1\beta_2\alpha_{2p+1}\alpha_{2p+2} \ldots \alpha_{3p}\alpha_{p+2}'\alpha_{p+3}' \ldots \alpha_{2p}'\beta_2'.$$

Ces $4p + 2$ sommets forment deux cycles qui sont d'ailleurs tels que la somme des angles de chacun d'eux est égale à 2π. Quatre côtés sont infinis à savoir $\beta_1'\alpha_1'$, $\alpha_{4p}\beta_1$, $\beta_2\alpha_{2p+1}$, $\alpha_{2p}'\beta_2'$. La L des côtés $\beta_1\beta_2$ et $\beta_1'\beta_2'$ est finie et leur longueur géométrique est infiniment petite.

Si nous passons à la limite cette longueur s'annullera absolument et les sommets β_1 et β_2, β_1' et β_2' se confondront. Le polygone R_0' se réduira alors à un autre polygone R_0'' qui n'aura plus que $4p$ sommets, deux sur le cercle fondamental β_1 et β_1' et $4p - 2$ en dehors de ce cercle. Chacun des sommets β_1 et β_1' forme à lui tout seul un cycle qui peut être parabolique ou hyperbolique.

Étudions maintenant le groupe G engendré par le polygone R_0 ou ce qui revient au même par R_0'. Si nous appelons S_i la substitution qui change le côté $\alpha_i\alpha_{i+1}$ de R_0 en son conjugué $\alpha_{2p+i}\alpha_{2p+i+1}$, le groupe G sera dérivé des $2p$ substitutions

$$S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{2p}$$

entre lesquelles nous avons la relation

$$S_1 S_2 \ldots S_{2p} = S_{2p} S_{2p-1} \ldots S_2 S_1 .$$

Quelles sont les substitutions de G qui changent chaque côté de R'_0 en son conjugué? Ce seront:

S_p	qui change	$\beta_1\beta_2$	en	$\beta'_1\beta'_2$
S_{2p}	»	» $\alpha_{2p+1}\beta_2$	en	$\alpha_{4p}\beta_1$
$S_p^{-1}S_{2p}S_p$	»	» $\beta'_2\alpha'_{2p}$	en	$\beta'_1\alpha'_1$

et

$S_p^{-1}S_i$	»	» $\alpha'_i\alpha'_{i+1}$	en	$\alpha_{2p+i}\alpha_{2p+i+1}$.

Lorsque le polygone R'_0 se réduit à R''_0, la substitution S_p devient illusoire et les substitutions S_{2p}, $S_p^{-1}S_{2p}S_p$ et $S_p^{-1}S_i$ se réduisent à certaines substitutions Σ, Σ'' et S'_i. De ces substitutions dérive un groupe G' qui est précisément engendré par R''_0 et de telle façon que Σ et Σ'' sont les deux substitutions qui changent la première $\alpha_{2p+1}\beta_1$ en $\alpha_{4p}\beta_1$, la seconde $\alpha'_{2p}\beta'_1$ en $\alpha'_1\beta'_1$.

Si les multiplicateurs de Σ et de Σ'' sont égaux à 1, ces deux substitutions sont paraboliques; le polygone R''_0 sera dit alors de la 1ère catégorie et ses transformés recouvriront tout le cercle fondamental. On en conclut, comme dans les deux exemples qui précèdent, que le deuxième lemme est applicable et que par conséquent les fonctions fuchsiennes engendrées par R'_0 tendent vers les fonctions fuchsiennes engendrées par R''_0, quand R'_0 tend vers R''_0.

Entrons dans plus de détails. Soient x et y deux fonctions fuchsiennes engendrées par R'_0; il y aura entre ces deux fonctions une relation algébrique

$$\varphi(x, y) = 0$$

qui sera de genre p, puisque R'_0 est de genre p. Si cette relation est regardée comme l'équation d'une courbe de degré m, cette courbe aura

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} - p$$

points doubles. Lorsque R_0' se réduira à R_0'', le genre de cette courbe devra diminuer d'une unité, puisque le polygone R_0'' est de genre $p - 1$; c'est à dire que la *courbe devra acquérir un nouveau point double.* A ce point double correspondront en réalité deux points analytiques différents (selon que le point double sera regardé comme appartenant à l'une ou à l'autre des branches de courbe qui y passent) et par conséquent *deux points réellement distincts du polygone* R_0''. Ces deux points seront β_1 et β_1' qui sont comme on le sait sur la circonférence du cercle fondamental. Il résulte de là que les deux fonctions fuchsiennes $\lim x$ et $\lim y$ ne peuvent prendre à l'intérieur du cercle fondamental les deux valeurs qui correspondent au nouveau point double.

Il ne peut pas arriver que l'un des multiplicateurs de Σ et de Σ' soit égal à 1 et l'autre différent de 1, de telle façon que l'une de ces substitutions soit parabolique et l'autre hyperbolique. En effet l'on a:

$$\text{mult}\, S_{2p} = \text{mult}\, S_p^{-1} S_{2p} S_p$$

d'où:

$$\lim \text{mult}\, S_{2p} = \lim \text{mult}\, S_p^{-1} S_{2p} S_p$$

et

$$\text{mult}\, \Sigma = \text{mult}\, \Sigma'.$$

Il peut arriver au contraire que les deux multiplicateurs soient différents de 1 et les deux substitutions hyperboliques. Dans ce cas R_0'' est dit de la 2ᵉ catégorie. Le deuxième lemme n'est plus applicable et les fonctions fuchsiennes engendrées par R_0' ne tendent pas vers celles qui sont engendrées par R_0''.

On traiterait de même le cas où plus de deux côtés de R_0 deviendraient infinis.

Les exemples qui précèdent suffiront, je pense, pour montrer comment doit être traitée dans chaque cas, la question des polygones limites.

Dans le cas du second exemple, nous dirons que le polygone limite R_0 est:

1° de la 1ère espèce s'il n'a que 4 côtés infinis et qu'ils soient consécutifs.

2° de la 2ᵉ espèce s'il n'a que 4 côtés infinis et qu'ils ne soient pas consécutifs. (Nous avons vu qu'un polygone de la 2ᵉ espèce peut toujours être ramené à un polygone de la 1ère).

3° de la 3ᵉ espèce s'il a plus de 4 côtés infinis; on démontrerait aisément qu'on peut toujours ramener au cas où tous les cotés infinis sont consécutifs.

Dans le cas du troisième exemple, nous dirons que le polygone limite R_0 est:

1° de la 1ère espèce s'il n'a que 2 côtés infinis.

2° de la 3ᵉ espèce, s'il a plus de deux côtés infinis.

§ 13. *Polygones réduits.*

Nous avons vu qu'aux différents polygones d'une même classe correspondaient un par un les différents points d'une multiplicité M_1. Mais à un même groupe fuchsien correspondent une infinité de polygones générateurs et par conséquent une infinité de points de M_1. En effet le procédé du § 9 du *Mémoire sur les groupes fuchsiens* permet de transformer le polygone R_0 en un autre R_0' équivalent à R_0 et engendrant le même groupe fuchsien. De là une infinité de transformations qui changent un polygone en un autre équivalent, et par conséquent un point de M_1 en un autre point de cette multiplicité. Ces substitutions forment un groupe que j'appelle Γ et qui est évidemment discontinu. La multiplicité M_1 va se trouver partagée en une infinité de domaines $D_0, D_1, \ldots, D_i, \ldots$, de telle façon qu'à chaque substitution de Γ corresponde un de ces domaines et que ce domaine soit précisément le transformé de D_0 par cette substitution. Cette subdivision de M_1 à l'aide du groupe Γ est tout à fait analogue à la subdivision du cercle fondamental en une infinité de polygones $R_0, R_1, \ldots$ à l'aide d'un groupe fuchsien quelconque. Nous allons d'ailleurs éclaircir ce qui précède par une comparaison simple.

Supposons que dans le plan des xy, le point x, y représente la quantité imaginaire $z = x + iy$ et considérons un parallélogramme rectiligne R_0, ayant pour sommets 0, z_1, z_2 et $z_1 + z_2$. On pourra subdiviser le plan en une infinité de parallélogrammes égaux à R_0 et on engendrera

ainsi le groupe $(z, z + \alpha z_1 + \beta z_2)$ où α et β sont des entiers quelconques; de ce groupe dériveront les fonctions doublement périodiques qui ont pour période z_1 et z_2. Mais ce parallélogramme peut être remplacé par un autre dont les sommets soient:

$$0, \ \alpha z_1 + \beta z_2, \ \gamma z_1 + \delta z_2, \ (\alpha + \gamma)z_1 + (\beta + \delta)z_2$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Ce second parallélogramme est équivalent au premier; je l'appellerai R'_0. Pour définir R_0, nous nous donnerons le rapport $\frac{z_2}{z_1} = \omega$. Aux différents parallélogrammes possibles correspondront différents points du plan des ω ou plutôt de la partie de ce plan qui est au dessus de l'axe des quantités réelles, partie que j'appellerai partie positive du plan. À R'_0 correspondra le point $\frac{\delta\omega + \gamma}{\beta\omega + \alpha}$, de sorte que la partie positive du plan des ω va se trouver partagée en une infinité de domaines qui se transformeront les uns dans les autres quand on appliquera à ω la substitution $\left(\omega, \frac{\delta\omega + \gamma}{\beta\omega + \alpha}\right)$. À toute fonction doublement périodique correspondra un point de chacun de ces domaines et un seul. Mais parmi tous les parallélogrammes équivalents à R_0, il y en a un qui est plus simple que tous les autres; c'est celui qui est tel que la forme quadratique positive:

$$\mathrm{mod}^2(\xi z_1 + \eta z_2)$$

où ξ et η sont des indéterminées entières, soit une forme réduite. On peut dire alors que ce parallélogramme est lui même réduit. On pourra définir ce parallélogramme réduit de la façon suivante:

1°. Il devra être tel que la partie imaginaire de ω soit aussi grande que possible.

2°. Et parmi ceux qui correspondent à ce maximum de la partie imaginaire de ω et qui sont en nombre infini, il devra être tel que la valeur absolue de la partie réelle de ω soit aussi petite que possible.

On voit aisément alors que ω doit satisfaire aux inégalités

$$-\frac{1}{2} < \text{partie réelle de } \omega < \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{mod}\,\omega > 1.$$

Les points ω qui correspondent à des parallélogrammes réduits sont alors compris dans un domaine D_0 défini par ces inégalités et limité par deux droites et un cercle. Ce domaine D_0 et ses transformés par les diverses substitutions du groupe $\left(\omega, \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}\right)$ remplissent alors toute la partie positive du plan des ω.

Nous pouvons opérer tout à fait de même dans le problème qui nous occupe car il est tout à fait analogue, si ce n'est que les parallélogrammes sont remplacés par des polygones générateurs d'un groupe fuchsien, les fonctions doublement périodiques par des fonctions fuchsiennes, et la partie positive du plan des ω par la multiplicité M_1.

Parmi les polygones équivalents à R_0, il y en aura un que nous regarderons comme plus simple que tous les autres et que nous appellerons *polygone réduit*. Voici comment nous pourrons définir ce polygone réduit. Soit φ une fonction des coordonnées d'un point de la multiplicité M_1. Je supposerai que cette fonction est constamment comprise entre 0 et 1, et qu'elle n'atteint la valeur 0 que sur les frontières de la multiplicité M_1, c'est à dire aux points qui correspondent aux polygones limites. Elle pourra d'ailleurs être choisie arbitrairement. Cela posé, aux différents polygones équivalents à R_0, correspondront différents points de M_1 et par conséquent différentes valeurs de φ. Le polygone que nous appellerons réduit sera celui qui correspondra à la plus grande valeur de φ.

Cela posé, les points de M_1 qui correspondront aux polygones réduits rempliront un certain domaine que j'appelle D_0. Ce domaine et ses transformés par les diverses substitutions de Γ rempliront toute la multiplicité M_1. Le domaine D_0 sera limité par un certain nombre de multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_q$ qui auront $p - 1$ dimensions, si je suppose que M_1 en a p. Voyons quelle sera la forme des équations de ces multiplicités frontières. Soit α un point de M_1, $\alpha . S$ le transformé de α par une substitution S convenablement choisie dans le groupe Γ; les équations cherchées seront de la forme suivante:

$$(1) \qquad \varphi(\alpha) = \varphi(\alpha . S)$$

φ désignant la fonction définie plus haut. Si nous considérons un point α appartenant à l'une des multiplicités frontières $m_1, m_2, \ldots, m_q$, par exemple à celle qui est définie par l'équation (1), ce point correspondra

à un polygone réduit, et il en sera de même du point $\alpha . S$ qui correspondra à un polygone réduit équivalent au premier et qui appartiendra aussi à une multiplicité frontière. C'est ainsi que certaines classes de formes quadratiques contiennent deux formes réduites et qu'à un point d'un côté du polygone générateur d'un groupe fuchsien, correspond un point *équivalent* du côté conjugué. Les multiplicités $m_1, m_2, \ldots, m_q$ se répartissent donc en paires de multiplicités conjuguées à la façon des côtés du polygone R_0. Ces multiplicités m sont limitées par des multiplicités m' de $p - 2$ dimensions; celles-ci le sont elles-même par des multiplicités m'' de $p - 3$ dimensions et ainsi de suite. Ces multiplicités m', m'', etc. se répartissent en cycles à la façon des sommets du polygone R_0. Ces cycles peuvent d'ailleurs contenir une, deux, ou plusieurs d'entre elles: si un de ces cycles en contient plus de deux, il y aura plus de deux polygones réduits équivalents à un polygone donné.

Ainsi, en général, il n'y a qu'un polygone réduit équivalent à un polygone donné, mais dans certains cas exceptionnels il peut y en avoir deux ou plusieurs. C'est tout à fait ce qui arrive pour les formes quadratiques définies. On peut présenter la chose d'une autre manière. En général, parmi les valeurs de φ qui correspondent à une infinité de polygones équivalents, il y en a une qui est plus grande que toutes les autres; mais il peut arriver exceptionnellement qu'il y en ait deux ou plusieurs qui soient égales entre elles et plus grandes que toutes les autres.

Nous allons maintenant nous occuper d'une question fort importante: quand un polygone limite est-il réduit? et nous examinerons successivement les trois exemples du paragraphe précédent.

Reprenons d'abord le polygone R_0 du 1[er] exemple, en supposant que les deux côtés conjugués $\alpha_{2n}\alpha_1$ et $\alpha_1\alpha_2$ sont infiniment petits. Nous avons vu qu'en laissant de côté le cas exceptionnel des polygones limites de la 3[e] espèce, tous les polygones limites pouvaient être ramenés à ce cas. Nous négligerons donc devant les quantités finies, les quantités de l'ordre de $\alpha_1\alpha_2$ et de $\alpha_1\alpha_{2n}$.

Je joins $\alpha_{2n-1}\alpha_2$. (Il faut entendre par là, ici comme dans tout ce qui va suivre, que je trace un arc de cercle passant par ces deux points et orthogonal au cercle fondamental.) Je divise ainsi le polygone R_0 en deux autres: $r_0 = \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\alpha_1\alpha_2$ et $r'_0 = R_0 - r_0$.

Transformons r_0 par la substitution linéaire qui change $\alpha_{2n}\alpha_{2n-1}$ en $\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}$; nous obtiendrons pour transformé un quadrilatère

$$r_0'' = \alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}\alpha_{1.1}\alpha_{2.1}.$$

Posons maintenant:

$$R_{0.1} = r_0' + r_0''.$$

Le polygone $R_{0.1}$ qui sera équivalent à R_0 aura pour sommets α_{2n-1}, α_{2n}, α_2, α_3, ..., α_{2n-3}, α_{2n-2}, $\alpha_{1.1}$, $\alpha_{2.1}$. On voit que $R_{0.1}$ a un sommet infiniment voisin de chacun des points

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-2}$$

et trois sommets infiniment voisins de α_{2n-2}. Quant à la longueur des côtés infiniment petits, elle sera donnée par la relation:

$$\alpha_{1.1} - \alpha_{2.1} = (\alpha_1 - \alpha_2)\frac{(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1})^2}{(\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n})^2}. \tag{2}$$

Joignons maintenant $\alpha_{2.1}\alpha_{2n-3}$, nous partagerons le polygone $R_{0.1}$ en deux autres: $r_{0.1} = \alpha_{1.1}\alpha_{2.1}\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-3}$ et $r_{0.1}' = R_{0.1} - r_{0.1}$. Soit maintenant $r_{0.1}'' = \alpha_{1.2}\alpha_{2.2}\alpha_{2n-4}\alpha_{2n-3}$ le transformé de $r_{0.1}$ par la substitution linéaire qui change $\alpha_{2n-3}\alpha_{2n-2}$ en $\alpha_{2n-3}\alpha_{2n-4}$. Soit enfin $R_{0.2} = r_{0.1}' + r_{0.1}''$. Il est aisé de voir que $R_{0.2}$, qui est équivalent à $R_{0.1}$, a un sommet infiniment voisin de chacun des points

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-2}$$

et trois sommets α_{2n-4}, $\alpha_{2.1}$, $\alpha_{2.2}$ infiniment voisins de α_{2n-4}. On aura d'ailleurs:

$$\alpha_{1.2} - \alpha_{2.2} = (\alpha_1 - \alpha_2)\left[\frac{(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1})(\alpha_{2n-4} - \alpha_{2n-3})}{(\alpha_{2n} - \alpha_{2n-1})(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-3})}\right]^2. \tag{2'}$$

Nous allons opérer sur $R_{0.2}$ comme nous avons opéré sur R_0 et sur $R_{0.1}$. C'est à dire que nous joindrons $\alpha_{2.2}\alpha_{2n-5}$ et que nous poserons, en appelant $r_{0.2}''$ le transformé de $r_{0.2}$ par la substitution linéaire qui change $\alpha_{2n-4}\alpha_{2n-5}$ en $\alpha_{2n-6}\alpha_{2n-5}$

$$r''_{0.2} = \alpha_{2n-4}\alpha_{2n-5}\alpha_{1.2}\alpha_{2.2}, \qquad r'_{0.2} = R_{0.2} - r_{0.2}$$

$$R_{0.3} = r'_{0.2} + r''_{0.2}.$$

On opérera ensuite sur $R_{0.3}$ comme sur $R_{0.2}$ et ainsi de suite.

Il est aisé de voir que $R_{0.i}$ a un sommet infiniment voisin de chacun des points

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2n-2}$$

et trois infiniment voisins de α_{2n-2i}.

Considérons en particulier le polygone $R_{0.n-1}$. Il aura trois sommets infiniment voisins de α_2 et par conséquent de α_{2n}. Ce seront les sommets α_2, $\alpha_{1.n-1}$ et $\alpha_{2.n-1}$ (qu'il ne faut pas confondre avec α_{2n-1}). Il résulte de là que $R_{0.n-1}$ différera infiniment peu de R_0. Ces deux polygones sont d'ailleurs équivalents, d'où il résulte que la transformation T qui change R_0 en $R_{0.n-1}$ appartient au groupe Γ.

Posons

$$H = \frac{(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_5)\ldots(\alpha_{2n-2} - \alpha_{2n-1})}{(\alpha_3 - \alpha_4)(\alpha_5 - \alpha_6)\ldots(\alpha_{2n-1} - \alpha_{2n})}.$$

Nous aurons la relation suivante qui est au polygone $R_{0.n-1}$ ce que les relations (2) et (2') sont aux polygones $R_{0.1}$ et $R_{0.2}$:

$$\alpha_{1.n-1} - \alpha_{2.n-1} = (\alpha_1 - \alpha_2)H^2$$

et de même

$$\alpha_2 - \alpha_{1.n-1} = (\alpha_{2n} - \alpha_1)H^2.$$

Cela posé, reprenons notre fonction φ et supposons qu'elle se comporte régulièrement, ce qui ne présente pas de difficulté puisque cette fonction est presque entièrement arbitraire. Pour un polygone qui a des côtés infiniment petits, la fonction φ est infiniment petite par hypothèse. Nous supposerons qu'elle est du 1er ordre ainsi que $\alpha_1 - \alpha_2$. En négligeant les infiniment petits du 2^d^ ordre, on peut dire que les trois quantités φ, $\alpha_1 - \alpha_2$ et $\alpha_1 - \alpha_{2n}$ sont proportionnelles. On a donc pour le polygone R_0

$$\varphi = (\alpha_1 - \alpha_2)F$$

F ne dépendant que de la position des points

$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-2}$$

et non de la longueur des côtés infiniment petits $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_1\alpha_{2n}$.

Appelons φ' et F' les valeurs de φ et de F qui correspondent à $R_{0.n-1}$; nous aurons:

$$F' = F \text{ à des inf. petits près du } 1^{\text{er}} \text{ ordre}$$

$$\varphi' = \varphi . H^2 \text{ à des inf. petits près du } 2^{\text{d}} \text{ ordre.}$$

Si donc $H^2 > 1$, la substitution T transforme R_0 en un polygone équivalent qui correspond à une valeur de φ plus grande. *Le polygone R_0 n'est donc pas réduit.*

Si au contraire $H^2 < 1$, la substitution inverse de T transformera R_0 en un polygone équivalent correspondant à une valeur de φ plus grande, de sorte que R_0 ne sera pas non plus réduit.

Reste le cas où $H^2 = 1$. Mais H est essentiellement négatif. On aura donc $H = -1$. Mais cette relation qui n'est autre que la relation (1^a) du paragraphe précédent, exprime que le polygone R_0 est de la $1^{\text{ère}}$ catégorie.

Ainsi *un polygone limite ne peut être réduit que s'il est de la $1^{\text{ère}}$ catégorie.*

Nous allons obtenir le même résultat dans les 2^{d} et 3e exemples. Nous allons traiter d'abord le 2^{d} exemple, en supposant pour fixer les idées:

$$a_1 = a_3 = \ldots = a_{2n-1}.$$

Je définirai dans le 2^{d} comme dans le 3e exemple, le polygone réduit de la manière suivante. Parmi les polygones équivalents à un polygone donné, j'appellerai ainsi celui qui sera tel que le plus grand de ses côtés soit aussi petit que possible. S'il y en a plusieurs qui satisfassent à cette condition, je choisirai parmi eux celui qui sera tel que le 2^{d} côté (par ordre de grandeur décroissante) soit aussi petit que possible et ainsi de suite. (Ici comme dans le paragraphe précédent, en ce qui concerne le 2^{d} et le 3e exemple, quand je dis qu'un côté est grand ou petit, il s'agit de sa L et non de sa longueur géométrique.)

Voici une proposition que je me borne à énoncer, et que je vais appliquer à mon dessein.

Soit un triangle ABC qui se déforme de telle façon que ses trois sommets tendent respectivement vers trois points A', B' et C' situés le premier sur le cercle fondamental, les deux autres à l'intérieur de ce cercle. Les deux côtés AB et AC croissent indéfiniment, pendant que BC reste fini; mais la différence des deux côtés AB et AC tend vers une limite finie λ:

$$\lim (AB - AC) = \lambda.$$

Cette limite ne dépend que de la position des trois points A', B', C' et non de la manière dont A, B, C tendent vers A', B', C'. Par les points B' et C' on peut faire passer deux cercles tangents intérieurement au cercle fondamental. Soient M et N les points de contact. Joignons MN par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental. Cet arc de cercle coupera $B'C'$ en un point P tel que la L de PB' soit égale à celle de PC'; je supposerai que B' est à gauche de MN et C' à droite. La limite λ sera positive si A' est à droite de MN, négative si A' est à gauche; elle sera nulle si A' est en M ou bien en N.

Considérons donc le polygone R_0 dont nous allons faire croître indéfiniment les côtés $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$ comme on l'a vu au paragraphe précédent. Il arrivera alors que les deux sommets α_{2n} et α_4 tendront vers deux points B' et C' intérieurs au cercle fondamental, pendant que α_1 tendra vers un point A' situé sur ce cercle lui-même. En même temps, les points α_2 et α_3 tendent aussi vers A', car les côtés $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha_2\alpha_3$ qui ont leur L infiniment grande, ont leur longueur géométrique infiniment petite.

Nous pourrons trouver sur le cercle fondamental les points M et N définis plus haut; nous joindrons MN; je suppose d'abord que A' soit comme B' à gauche de MN. On aura en vertu du lemme que je viens d'énoncer

$$\lim \alpha_{2n} = B', \qquad \lim \alpha_4 = C', \qquad \lim \alpha_1 = \lim \alpha_2 = \lim \alpha_3 = A'$$

$$\alpha_2\alpha_4 > \alpha_2\alpha_{2n}, \qquad \alpha_3\alpha_4 > \alpha_3\alpha_{2n}.$$

Dans les deux triangles $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_1\alpha_{2n}$ on a

$$\alpha_2\alpha_3 = \alpha_3\alpha_4, \qquad \alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_{2n}$$

$$\text{angle } \alpha_2\alpha_1\alpha_{2n} = \text{angle } \alpha_2\alpha_3\alpha_4$$

et

$$\alpha_2\alpha_4 > \alpha_2\alpha_{2n}$$

d'où

$$\alpha_3\alpha_4 > \alpha_1\alpha_2.$$

Le côté $\alpha_3\alpha_4 = \alpha_2\alpha_3$ est donc le plus grand côté de R_0 puisque tous les autres que $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_{2n}$ sont finis.

Je dis qu'on peut trouver un polygone équivalent à R_0 dont le plus grand côté soit plus petit que $\alpha_3\alpha_4$.

Joignons $\alpha_3\alpha_{2n}$, nous aurons partagé le polygone R_0 en deux autres:

$$r_0 = \alpha_{2n}\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \qquad r_0' = \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \ldots \alpha_{2n}.$$

Transformons r_0' par la substitution qui change $\alpha_3\alpha_4$ en $\alpha_3\alpha_2$. Nous obtiendrons

$$r_0'' = \alpha_3'\alpha_4'\alpha_5' \ldots \alpha_{2n}'$$

avec

$$\alpha_3' = \alpha_3, \qquad \alpha_4' = \alpha_2.$$

Le polygone $R_0' = r_0 + r_0''$ est équivalent à R_0. Il a $2n - 4$ côtés égaux aux $2n - 4$ côtés finis de R_0. Il admet aussi deux côtés infinis

$$\alpha_1\alpha_2 = \alpha_1\alpha_{2n}$$

qui appartiennent à R_0 et les deux côtés infinis

$$\alpha_3\alpha_{2n} = \alpha_3\alpha_{2n}'$$

qui n'appartiennent pas à R_0. Si $\alpha_3\alpha_{2n} > \alpha_1\alpha_2$, c'est $\alpha_3\alpha_{2n}$ qui est le plus grand côté de R_0' et on a:

$$\alpha_3\alpha_{2n} < \alpha_3\alpha_4.$$

C. Q. F. D.

Si $\alpha_3\alpha_{2n} < \alpha_1\alpha_2$, c'est $\alpha_1\alpha_2$ qui est le plus grand côté de R'_0 et on a

$$\alpha_1\alpha_2 < \alpha_3\alpha_4.$$

C. Q. F. D.

Ainsi, si le point A' est à gauche de MN, le polygone R_0 n'est pas réduit; mais comme rien ne distingue la gauche de la droite, il n'est pas réduit non plus si A' est à droite de MN. Il faut donc que A' soit en M ou en N. Mais alors le cercle $A'B'C'$ est tangent au cercle fondamental, ce qui veut dire que le polygone limite est de la 1ère catégorie.

Ainsi tout polygone limite réduit est de la 1ère catégorie.

Passons au 3e exemple, c'est à dire à un polygone R_0 de $4p$ côtés dont les côtés opposés sont conjugués. Joignons les sommets opposés; nous obtiendrons ainsi $4p$ diagonales. Je dis que si R_0 est réduit, le plus grand des $4p$ côtés du polygone est plus petit que la plus petite de ces $4p$ diagonales. J'appelle δ cette plus petite diagonale; si ce côté était plus grand que δ, on partagerait le polygone R_0 en deux autres r_0 et r'_0 en traçant la diagonale δ. On appellerait ensuite r''_0 le transformé de r_0 par la substitution qui change le plus grand des côtés de R_0 en son conjugué. Le polygone $R'_0 = r'_0 + r''_0$ serait équivalent à R_0; il aurait ses côtés opposés conjugués; de plus il admettrait tous les côtés de R_0 sauf le plus grand qui serait remplacé par la diagonale δ, qui par hypothèse est plus petite. Le plus grand côté de R'_0 serait donc plus petit que celui de R_0 et R_0 ne serait pas réduit.

Cela posé, supposons, comme dans le paragraphe précédent, que les deux côtés $\alpha_{4p}\alpha_1$ et $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ croissent indéfiniment; il en sera de même des diagonales $\alpha_{4p}\alpha_{2p}$ et $\alpha_1\alpha_{2p+1}$; tous les autres côtés resteront finis. Supposons que les sommets α_{4p} et α_{2p+1} tendent vers deux points B' et C' intérieurs au cercle fondamental. Les sommets $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$ tendront vers un même point A' situé sur la circonférence de ce cercle et ce point A' est également celui avec lequel tendent à se confondre les sommets β_1 et β_2 du polygone R'_0. De ce fait résulte l'identité suivante:

$$\lim(\alpha_1\alpha_{4p} - \alpha_1\alpha_{2p+1}) = \lim(\alpha_{2p}\alpha_{4p} - \alpha_{2p}\alpha_{2p+1}).$$

Mais si le polygone R_0 est réduit, on a d'autre part, puisque les côtés sont plus petits que les diagonales

$$\alpha_1\alpha_{4p} \leqq \alpha_1\alpha_{2p+1}, \qquad \alpha_{2p}\alpha_{4p} \leqq \alpha_{2p}\alpha_{2p+1}.$$

Donc on a

$$\lim (\alpha_1\alpha_{4p} - \alpha_1\alpha_{2p+1}) = 0.$$

On en conclut, comme dans l'exemple précédent, que le cercle $A'B'C'$ est tangent au cercle fondamental et que le polygone R_0 est de la 1ère catégorie.

Ainsi tout polygone limite réduit est de la 1ère catégorie.

Tout ce qui précède ne s'applique qu'aux polygones de la 1ère espèce.

Passons d'abord aux polygones de la 2e espèce qui peuvent comme nous l'avons vu être ramenés à un polygone limite de la 1ère espèce. Supposons donc que P_0 soit un polygone de la 2e espèce; ce polygone sera équivalent à un autre R_0 de la 1ère espèce; si R_0 n'est pas de la 1ère catégorie, je dis que P_0 n'est pas réduit.

En effet envisageons la fonction φ définie plus haut; cette fonction dans le cas du 2d et du 3e exemple sera, pour fixer les idées, l'inverse du plus grand côté de R_0.

La fonction φ correspondant soit au polygone P_0, soit au polygone R_0 sera infiniment petite. Soient a et b les points de M_1 qui correspondent à R_0 et à P_0; chacun de ces deux points sera infiniment près d'une des frontières de la multiplicité M_1; soient c et d les points de ces frontières qui sont respectivement le plus rapprochés l'un de a et l'autre de b. Les coordonnées du point a sont fonctions de celles du point b, puisque les deux polygones correspondants R_0 et P_0 dérivent l'un de l'autre d'après une loi déterminée. Si a et b sont très voisins des frontières, comme nous le supposons ici, la position du point c dépend de celle du point d, de telle façon que les coordonnées d'un de ces points soient fonctions continues de celles de l'autre. Maintenant si les points c et d restant fixes, *à des infiniment petits près,* le point a se rapproche du point c de telle façon que la distance infiniment petite ac diminue de moitié par exemple, la distance infiniment petite bd diminuera aussi de moitié.

Si nous appelons φ_1 et φ_2 les valeurs de φ qui répondent aux points a et b, nous aurons à des infiniment petits près du 2d ordre

$$\varphi_1 = \overline{ac}\cdot f_1(c), \qquad \varphi_2 = \overline{bd}\cdot f_2(d)$$

les fonctions f_1 et f_2 étant des fonctions finies, en général et ne dépendant que de c et de d.

Si donc les points c et d restant fixes ou ne variant qu'infiniment peu, la distance ac diminue dans un certain rapport, les deux fonctions infiniment petites φ_1 et φ_2 diminueront dans le même rapport.

Cela posé, nous avons vu que si R_0 n'est pas de la 1ère catégorie, ce polygone n'est pas réduit et qu'on peut trouver un polygone équivalent R'_0 correspondant à une plus grande valeur de φ. Soit P'_0 le polygone de la 2de espèce qui dérive de R'_0 comme P_0 de R_0; soient a', b', c', d' les points qui sont à R'_0 et P'_0 ce que les points a, b, c, d sont à R_0 et à P_0; soient φ'_1 et φ'_2 les valeurs de φ qui correspondent à R'_0 et à P'_0. Les points c' et d', il est aisé de le constater, différeront infiniment peu de c et de d; on aura donc

$$\frac{ac}{a'c'} = \frac{bd}{b'd'}$$

$$\varphi'_1 = a'c'f_1(c') = a'c'f_1(c)$$

$$\varphi'_2 = b'd'f_2(d') = b'd'f_2(d)$$

à des infiniment petits près et par conséquent

$$\frac{\varphi_1}{\varphi'_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi'_2}.$$

Mais on a

$$\varphi'_1 > \varphi_1$$

on aura donc

$$\varphi'_2 > \varphi_2$$

et par conséquent le polygone P_0 ne sera pas réduit.

Ainsi, *un polygone limite de la 2e espèce ne peut être réduit que s'il est équivalent à un polygone de la 1ère espèce et de la 1ère catégorie.*

Le cas des polygones de la 3e espèce qui sont un cas particulier de ceux de la 1ère et de la 2e se traiterait d'après les mêmes principes. Nous n'allons étudier ici qu'un seul exemple. Nous fixerons ainsi les idées, et le lecteur se rendra mieux compte de la façon dont nous surmontons les différentes difficultés que si nous étudiions directement le cas général.

Nous choisirons le polygone R_0 du 2[d] exemple en supposant que les six côtés $\alpha_{2n}\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_4\alpha_5$ et $\alpha_5\alpha_6$ croissent indéfiniment.

Nous supposerons que ce polygone est réduit, et nous allons faire voir qu'il est de la 1[ère] catégorie, c'est à dire que les cinq sommets α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 tendent à se confondre en un seul point situé sur la circonférence du cercle fondamental, et cela de telle sorte que le cercle $\alpha_{2n}\alpha_1\alpha_6$ soit tangent au cercle fondamental.

Pour cela nous nous appuierons sur les deux principes suivants:

1°. Si le polygone R_0 est réduit, les côtés issus d'un sommet de rang impair sont plus petits que la diagonale qui joint ce sommet à un sommet quelconque de rang pair. En effet, soit C le côté $\alpha_1\alpha_2$, par exemple, et D une diagonale joignant α_1 à un sommet quelconque de rang pair. Il est aisé de construire un polygone R_0' équivalent à R_0 et admettant mêmes côtés (en grandeur) que R_0, sauf que le côté C est remplacé par D. Si l'on avait $C > D$, le plus grand côté de R_0 serait plus grand que le plus grand côté de R_0' et R_0 ne serait pas réduit.

2°. Supposons que les trois sommets d'un triangle ABC tendent respectivement vers trois points A', B', C', situés, le premier à l'intérieur du cercle fondamental, et les deux autres sur la circonférence de ce cercle. *Si les deux points B' et C' sont distincts l'un de l'autre,* les trois côtés croîtront indéfiniment, l'angle BAC tendra vers une limite finie, ainsi que la différence

$$AB + AC - BC$$

et par conséquent le côté BC sera plus grand que chacun des deux autres.

Cela posé, supposons que dans le polygone réduit R_0, les deux sommets α_{2n} et α_6 tendent vers deux points fixes B' et C' du plan. Les cinq sommets α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 dont la distance à α_6 est infinie, tendront vers certains points du cercle fondamental.

Si on avait:

$$\lim \alpha_4 \gtrless \lim \alpha_5$$

on aurait en vertu du 2[d] principe

$$\alpha_5\alpha_4 > \alpha_5\alpha_{2n}$$

ce qui est contraire au premier principe.

De même si on avait:

$$\lim \alpha_4 \gtrless \lim \alpha_3, \qquad \lim \alpha_3 \gtrless \lim \alpha_2 \qquad \text{ou} \qquad \lim \alpha_2 \gtrless \lim \alpha_1$$

on aurait

$$\alpha_3\alpha_4 > \alpha_3\alpha_{2n}, \qquad \alpha_2\alpha_3 > \alpha_3\alpha_{2n} \qquad \text{ou} \qquad \alpha_2\alpha_1 > \alpha_1\alpha_6$$

ce qui serait contraire au premier principe.

Donc les cinq sommets $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_5$ tendent vers un seul et même point A' du cercle fondamental.

Joignons les deux points M et N définis plus haut. Si A' était à gauche de MN (c'est à dire du même côté que B') on aurait:

$$\alpha_5\alpha_{2n} < \alpha_5\alpha_6$$

et s'il était à droite

$$\alpha_1\alpha_6 < \alpha_1\alpha_{2n}$$

ce qui serait contraire au premier principe.

Ainsi A' est en M ou en N, c'est à dire que le cercle $A'B'C'$ est tangent au cercle fondamental, c'est à dire que R_0 est de la 1ère catégorie.

C. Q. F. D.

§ 14. *Méthode de continuité.*

Tous les lemmes que nous avons établis vont nous permettre d'appliquer avec toute rigueur la méthode de continuité.

Considérons une infinité de types T appartenant à une même classe et définis par un certain nombre de paramètres qui seront, si l'équation générale du type s'écrit

$$(1) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \qquad\qquad (2) \qquad \psi(x, y) = 0$$

les modules de la relation (2) et les points singuliers de l'équation (1). Soit q le nombre de ces paramètres. Ces paramètres vont définir un point d'une certaine multiplicité M à q dimensions. Je dis que cette

multiplicité est fermée et ne présente pas de frontière. En effet RIEMANN a démontré que si une multiplicité à q dimensions était limitée par une autre multiplicité, cette autre multiplicité devrait être à $q - 1$ dimensions. C'est ainsi qu'une surface, par exemple, ne peut être *découpée* (zerschnitten) que par une ligne et non par un point.

Or en faisant varier les paramètres du type, on ne pourrait arriver à la frontière de M qu'en atteignant certains points singuliers de cette multiplicité, correspondant au cas où le type T se réduit à un type T' plus simple (cf. § 9, page 238). Or cela ne peut arriver que de deux manières:

1° ou bien, si deux points singuliers de (1) venaient à se confondre; mais il faut pour cela une condition *complexe,* c'est à dire deux conditions *réelles.*

2° ou bien, si le genre de la relation (2) s'abaisse d'une unité, c'est à dire si la courbe représentée par cette relation acquiert un nouveau point double. Mais ici encore il faut pour cela deux conditions réelles.

Ainsi dans l'un comme dans l'autre cas, il faut s'imposer deux conditions, et les points singuliers qui satisfont à ces conditions forment une multiplicité à $q - 2$ dimensions qui ne peut servir de frontière à M qui en a q. J'appellerai $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ces multiplicités à $q - 1$ dimensions que je viens de définir.

Considérons maintenant le domaine D_0 défini au § 13. À chacun des points de ce domaine correspond un polygone R_0 et par conséquent une équation fuchsienne. Considérons les paramètres du type auquel elle appartient: ils définiront un certain point de la multiplicité M. Ainsi à tout point de D_0 correspondra un point de M et un seul. D'autre part, à tout point μ de M correspondant à un type fuchsien qui contient une équation fuchsienne, correspondra un point δ de D_0 et un seul. Il y a exception toutefois si le point δ se trouve sur l'une des multiplicités $m_1, m_2, \ldots$ qui séparent D_0 du reste de la multiplicité M_1. Dans ce cas en effet, il y a deux ou plusieurs polygones équivalents réduits, de sorte qu'au point μ correspondent deux ou plusieurs points δ. Au domaine D_0 tout entier correspondra ou bien une portion de M, ou bien cette multiplicité tout entière.

Je dis que le premier cas ne se présentera pas. En effet, s'il se présentait, la multiplicité M serait partagée en deux parties, celle qui

correspond à D_0 et celle qui ne correspond pas à D_0, et ces deux parties devraient être séparées l'une de l'autre par une multiplicité frontière, qui devrait avoir, d'après le théorème de RIEMANN, $q - 1$ dimensions.

Or comment pourrait-il arriver que, le point δ de D_0 se mouvant dans ce domaine, le point correspondant μ de M atteignît cette multiplicité frontière hypothétique?

Est-ce parce que le déterminant fonctionnel des coordonnées de μ par rapport à celles de δ s'annullerait? Mais cela n'arrivera jamais puisque le lemme du § 7 montre qu'à tout point μ ne peut correspondre qu'un seul point δ.

Est-ce parce que le point δ atteindrait l'une de ces multiplicités m_1, m_2, ... qui séparent le domaine D_0 des autres parties de la multiplicité M_1? Mais supposons, par exemple, que le point δ franchisse une multiplicité m_1 qui sépare le domaine D_0 d'un autre domaine D_1. Le point μ franchira alors une certaine multiplicité μ_1 qui correspondra à m_1; mais le point δ étant entré dans le domaine D_1 qui fait encore partie de la multiplicité M_1, à ce point δ correspondra encore un polygone R_0 et par conséquent une équation fuchsienne et un point de la multiplicité M. La multiplicité μ_1 ne sépare donc pas les types fuchsiens qui contiennent des équations fuchsiennes, de ceux qui n'en contiennent pas.

Est-ce enfin parce que le point δ atteindrait la limite même de la multiplicité M_1? Il arriverait alors que le polygone R_0 correspondant deviendrait un *polygone limite*. Mais comme δ est intérieur à D_0, le polygone R_0 est réduit et par conséquent *de la 1ère catégorie ou équivalent à un polygone de la 1ère catégorie*. Mais le 2d lemme nous a fait voir que lorsque R_0 tendait à se réduire à un polygone limite de la 1ère catégorie, le type correspondant T tendait à se réduire à un type plus simple T', c'est à dire que deux des points singuliers de (1) tendaient à se confondre, ou bien que le genre de (2) tendait à s'abaisser d'une unité. Donc lorsque le point δ en restant intérieur à D_0, tend vers une des frontières de M_1, le point correspondant μ tend vers l'une des multiplicités σ_1, σ_2, ... Mais ces multiplicités n'ont que $q - 2$ dimensions. Elles ne peuvent donc partager M en deux parties.

Donc M ne se partage pas en deux parties, l'une correspondant à D_0, l'autre ne correspondant pas à D_0.

Donc *tout type fuchsien contient une équation fuchsienne.*

§ 15. *Application particulière.*

Nous allons donner des principes qui précèdent une application particulière. Nous choisirons pour cela le cas le plus simple qui puisse se présenter, c'est à dire le 1er exemple du § 12, en supposant que R_0 n'a que 6 côtés. C'est le cas du paraboloïde (1') du § 12. Cet exemple facilitera l'intelligence de ce qui précède.

Dans le cas qui nous occupe, la multiplicité M_1 est représentée comme on l'a vu par le paraboloïde (1'). Voyons ce que devient la multiplicité M.

L'équation fuchsienne engendrée par R_0 admet 4 points singuliers et de telle façon que les 4 équations déterminantes aient chacune une racine double.

Soient α, β, γ, δ ces quatre points singuliers. Soit $\psi(\mu)$ le rapport anharmonique de μ par rapport aux trois points β, γ, δ de telle sorte que

$$\psi(\beta) = 0, \qquad \psi(\gamma) = 1, \qquad \psi(\delta) = \infty.$$

Posons:

$$\psi(\alpha) = X.$$

Le type auquel appartient l'équation fuchsienne considérée est entièrement défini quand on connaît X. La multiplicité M se réduit donc à la sphère ou au plan représentatif de la quantité complexe X.

Quand on permute de toutes les manières possibles les quatre points singuliers, on obtient pour X les 6 valeurs suivantes:

$$(1) \qquad \left[X,\ 1 - X,\ \frac{1}{X},\ \frac{1}{1-X},\ 1 - \frac{1}{X},\ \frac{X}{X-1}\right].$$

On peut partager le plan des X en 6 régions

$$\rho_0 + \rho'_0,\ \rho_1 + \rho'_1,\ \rho_2 + \rho'_2,\ \rho_3 + \rho'_3,\ \rho_4 + \rho'_4,\ \rho_5 + \rho'_5.$$

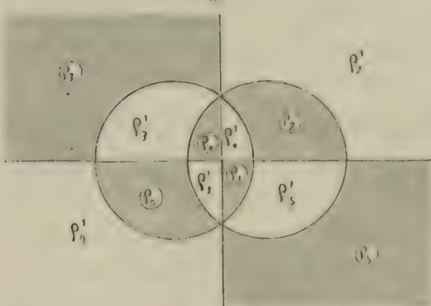
La figure 1 indique cette subdivision; les deux cercles et les droites qui y sont représentées ont pour équations:

$$\operatorname{mod} X = 1, \quad \operatorname{mod}(1 - X) = 1, \quad \text{partie réelle de } X = \frac{1}{2}$$

$$\text{partie imag. de } X = 0.$$

On voit aisément que si X est intérieur à ρ_0 et si X_0 est la quantité imaginaire conjuguée de X, les quantités $1 - X$, $\frac{1}{1 - X}$, $\frac{X}{X - 1}$, $1 - \frac{1}{X}$, $\frac{1}{X}$, $1 - X_0$, X_0, $\frac{1}{X_0}$, $1 - \frac{1}{X_0}$, $\frac{X_0}{X_0 - 1}$, $\frac{1}{1 - X_0}$ font respectivement partie de ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5, ρ'_0, ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3, ρ'_4, ρ'_5.

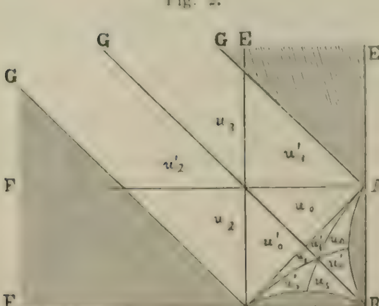
Fig. 1.



Maintenant il s'agit de subdiviser le paraboloïde (1′) en une infinité de domaines D_0, D_1, ... comme il a été dit au § 13, c'est à dire de telle façon que D_0 contienne les points de ce paraboloïde qui correspondent à des polygones R_0 réduits et qu'à chaque point de M corresponde un point et un seul de chacun de ces domaines. Ce ne sera pas tout. De même que M se partage en 12 régions ρ et ρ', de même D_0 se partagera en 12 régions partielles qui correspondront respectivement aux 12 régions de M; et il en sera de même de chacun des domaines D_1, D_2, etc.

La figure 2 représente le paraboloïde (1′) projeté sur le plan des xy; la droite BCF a pour équation $y = 1$ et la droite BAE, $x = 0$. La droite $x = 0$, $y = 1$ se projette tout entière au point B. La partie non hachée représente la projection de D_0. Cette projection est limitée par les droites CG et AG et par les paraboles AB et BC. Elle est subdivisée en douze régions par les droites AC, CE, AF, BG et par deux courbes.

Fig. 2.



Ces droites ont pour équations:

$$CG,\ x+y=0;\quad BG,\ x+y=1;\quad AG,\ x+y=2;\quad AC,\ x-y=-1;$$
$$AF,\ y=2;\quad CE,\ x=-1.$$

Les deux paraboles AB et BC sont tangentes aux droites AC et BG. Enfin les deux autres courbes tracées sur cette figure sont des arcs de coniques. On voit que le domaine D_0 est divisé en 12 régions u_i et u'_i correspondant respectivement aux 12 régions ρ_i et ρ'_i.

Voici comment il faut s'y prendre pour démontrer que quand le point ∂ parcourt sur la multiplicité M_1 le domaine u_i ou u'_i, le point correspondant μ de la multiplicité M parcourt la région ρ_i ou ρ'_i.

Soit R'_0 le polygone symétrique de R_0 par rapport à sa diagonale be. J'appellerai $a'b'c'd'e'f'$ les sommets de R'_0, mais afin qu'ils se présentent dans le même ordre circulaire que ceux de R_0, a' sera le symétrique de c, c' celui de a; d' sera le symétrique de f, f' celui de d; quant à b' et e' ils ne différeront pas de b et e. Grâce à ces conventions, on voit aisément que les nouvelles valeurs de x, y, z sont respectivement:

$$1-y, \qquad 1-x, \qquad 1-z.$$

Soit maintenant X' la valeur de X qui correspond au polygone R'_0, on voit aisément que l'on a:

$$X' = 1 - X_0.$$

Si en particulier le polygone R_0 est symétrique par rapport à be, il ne diffère pas de R'_0; on a:

$$x+y=1, \qquad z=\frac{1}{2}$$
$$X = 1 - X_0.$$

Si donc le point ∂ décrit la droite BG, le point μ décrira la droite:

$$\text{partie réelle de } X = \frac{1}{2}.$$

On voit de même que si on change R_0 dans le polygone symétrique par rapport à la diagonale cf, x, y et z se changent en $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{z}$ et $\frac{1}{y}$ et

X en $\frac{1}{X_0}$. On en conclut que si R_0 est symétrique par rapport à cf, c'est à dire si le point δ décrit la droite CE, le point μ décrit le cercle:

$$\mathrm{mod}\, X = 1.$$

Le polygone R_0 est équivalent à un polygone R_0' qu'on obtient en joignant bf, et en transformant le triangle baf par la substitution qui change ba en bc. On obtient ainsi un polygone $bfedcf'$; f' étant le transformé de f par la substitution en question. Prenons le symétrique de R_0' par rapport à la diagonale bd. Ce symétrique pourra être regardé comme dérivé d'un certain polygone R_0'' de la même façon que R_0' de R_0. On voit aisément qu'en changeant R_0 en R_0'', on change x, y et z en $\frac{z^2}{x}$, $1 + \frac{z(z-1)}{x}$ et z et X en X_0.

Si donc le point δ décrit la droite AC, le point μ décrira la droite

$$X = X_0, \qquad \text{partie imaginaire de } X = 0.$$

Le problème suivant: Étant donné un type fuchsien, trouver le groupe fuchsien qui engendre une équation fuchsienne contenue dans ce type, est un problème très compliqué dont nous dirons quelques mots plus loin.

Mais, d'après ce qui précède, dans les cas particuliers suivants:

$$X = \frac{1}{2}, \quad X = -1, \quad X = 2, \quad X = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad X = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$$

il se résout par de simples considérations de symétrie, et on trouve respectivement pour les paramètres qui définissent le polygone générateur du groupe fuchsien correspondant:

$$x = -\frac{1}{2} \qquad y = \frac{3}{2} \qquad z = \frac{1}{2}$$

$$x = -1 \qquad y = 3 \qquad z = \frac{1}{3}$$

$$x = -2 \qquad y = 2 \qquad z = \frac{2}{3}$$

$$x = -1 \qquad y = 2 \qquad z = \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{4} \qquad y = \frac{3}{4} \qquad z = \frac{1}{2}.$$

J'appelle S_1, S_2 et S_3 les opérations dont il a été question plus haut et dont voici la définition d'après les changements qu'elles font subir à x, y, z et X.

$$S_1 \qquad (x,\ y,\ z;\ 1-y,\ 1-x,\ 1-z) \qquad (X,\ 1-X_0)$$

$$S_2 \qquad \left(x,\ y,\ z;\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{y}\right) \qquad \left(X,\ \frac{1}{X_0}\right)$$

$$S_3 \qquad \left(x,\ y,\ z;\ \frac{z^2}{x},\ 1+\frac{z(z-1)}{x},\ z\right) \qquad (X,\ X_0).$$

Envisageons:

1°. Le groupe Γ_1 dérivé de ces trois substitutions. Si on transforme le triangle u_0 par toutes les substitutions de ce groupe, on obtiendra une infinité de triangles analogues qui rempliront toute la multiplicité M_1.

2°. Le groupe Γ_2 formé de toutes les combinaisons *en nombre pair* des substitutions S_1, S_2 et S_3. Ce que ce groupe a de remarquable, c'est qu'il est isomorphe au groupe

$$\left(z,\ \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$$

où α, β, γ, δ sont des entiers tels que $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.

3°. Le groupe Γ formé de toutes celles des substitutions du groupe Γ_1 qui n'altèrent pas X. Si l'on applique à D_0 toutes les transformations de Γ, on obtient une série de domaines D_1, D_2, etc. qui remplissent toute la multiplicité M_1. Le groupe Γ est isomorphe au groupe des substitutions

$$\left(z,\ \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$$

où α, β, γ, δ sont entiers et où:

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1, \qquad \alpha\equiv\delta\equiv 1, \qquad \beta\equiv\gamma\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

c'est à dire au groupe que l'on rencontre dans l'étude de la fonction modulaire.

Chacun des domaines D_1, D_2, etc. est divisé en 12 régions de la

même façon que D_0 est divisé en u_i et u'_i. Mais D_0 peut être regardé aussi comme divisé en 2 triangles:

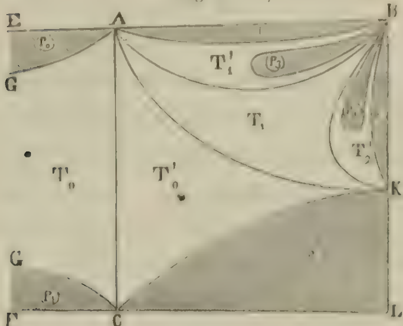
$$T_0 = u_0 + u'_0 + u_2 + u'_2 + u_3 + u'_3$$

et

$$T'_0 = u_1 + u'_1 + u_4 + u'_4 + u_5 + u'_5.$$

De même chacun des domaines D_1, D_2, etc. seront regardés comme partagés en 2 triangles T_1 et T'_1, T_2 et T'_2 etc. C'est ce mode de subdivision que nous avons adopté dans les figures 3, 4 et 5 qui représentent en perspective des portions du paraboloïde (1').

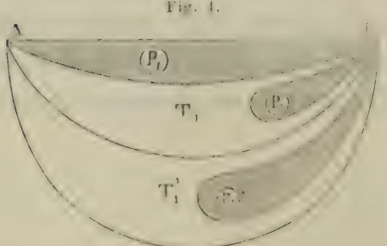
Fig. 3.



Dans la figure 3 la droite BKL représente la génératrice $x = 0$, $y = 1$ qui dans la figure 1 n'était représentée que par le point B. On remarquera aussi dans cette figure les cinq triangles T_0, T'_0, T_1, T'_1, T'_2 non hachés, et les portions P_0 à P_6 du paraboloïde où la subdivision n'est pas représentée et qui sont couvertes de hachures. On verra aussi que chacun des deux triangles T'_1 et T'_2 a deux de ses sommets confondus en B.

La figure 4 représente à plus grande échelle la subdivision de la région $T'_1 + P_2 + P_3$. La portion P_2 a été divisée en un triangle T_3 et deux régions hachées P_7 et P_8. Les régions hachées sont dans les quatre figures 2, 3, 4 et 5 celles où la subdivision n'est pas représentée.

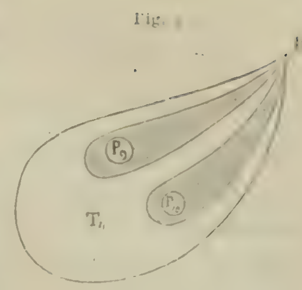
Fig. 4.



Enfin la figure 5 représente le détail de la région P_3 qui est divisée en un triangle T_4 et deux régions hachées P_9 et P_{10}. On voit que le triangle T_4 a ses trois sommets confondus en B.

Ces figures suffisent pour qu'on se rende compte de toutes les particularités de la subdivision. En effet la région P_6 ou CKL se traite comme la région AKB; les régions P_0 et P_1 se traitent comme la région $ABLC$, sauf qu'une partie de la figure est rejetée à l'infini. Les régions

P_5 et P_7 se traitent comme P_2; enfin P_4, P_8, P_9 et P_{10} se traitent comme P_3.



Les points des droites BE et FL correspondent à des polygones de la 1ère espèce, et sur ces droites, les points A et C sont les seuls qui correspondent à des polygones de la 1ère catégorie; ce sont les seuls aussi qui fassent partie de D_0. Sur la droite BL qui correspond à des polygones de la 2e espèce, le point K est le seul qui fasse partie de D_0. Et en effet la substitution S_3 le change dans le point

$$x = y = \infty, \qquad z = \frac{1}{2}$$

qui correspond à un polygone de la 1ère catégorie.

§ 16. *Théorie des sous-groupes.*

Nous venons de démontrer que tout type fuchsien contient une équation fuchsienne; il faut maintenant trouver l'équation fuchsienne contenue dans un type fuchsien donné, ou bien encore trouver le groupe fuchsien correspondant.

Mais avant d'aborder ce problème, il faut dire quelques mots des sous-groupes contenus dans un groupe fuchsien donné.

Ces sous-groupes sont de deux sortes:

1°. Les sous-groupes d'indice fini, c'est à dire ceux qui sont tels qu'on peut obtenir toutes les substitutions du groupe principal en multipliant toutes les substitutions du sous-groupe par un nombre fini de substitutions.

2°. Les sous-groupes d'indice infini.

A un autre point de vue, les sous-groupes sont encore de deux sortes:

1°. Les sous-groupes distingués (*ausgezeichnet*) comme disent les Allemands, c'est à dire ceux qui sont permutables à toutes les substitutions du groupe principal.

2°. Les sous-groupes non distingués.

(Cf. Klein, Mathematische Annalen, Bd XVII; Walther Dyck, *Ueber reguläre Riemannsche Fläche, Gruppentheoretische Studien*. Mathematische Annalen.)

Les sous-groupes d'indice fini ne sont autre chose que des groupes fuchsiens: Soit G le groupe principal et g le sous-groupe qui y est contenu. Soit R_0 le polygone générateur de G; R_1, R_2, ... ses divers transformés par les diverses substitutions de ce groupe. Soit P_0 le polygone générateur de g. Il est aisé de voir que P_0 est formé par la réunion d'un certain nombre de polygones R_0, R_1, R_2, ..., R_n.

Choisissons d'une manière quelconque $n + 1$ polygones parmi les polygones:

$$R_0, \ R_1, \ R_2, \ \ldots$$

Soient par exemple R_0, R_1, R_2, ..., R_n ces $n + 1$ polygones et supposons que leur ensemble forme un seul tout simplement connexe. Soit P_0 cet ensemble. Un certain nombre de côtés des polygones R resteront libres; ce seront les côtés de P_0. Il reste à voir comment ces côtés doivent être distribués en paires de côtés conjugués. Soit a_0b_0 un côté de R_0, $a'_0b'_0$ son conjugué; soient a_1b_1, $a'_1b'_1$ les côtés homologues de R_1; a_2b_2, $a'_2b'_2$ ceux de R_2, etc. Parmi les $n + 1$ côtés a_ib_i, il y en aura un certain nombre p qui resteront libres; de même parmi les $n + 1$ côtés $a'_ib'_i$ il y en aura p, c'est à dire un nombre précisément égal, qui resteront libres. Nous pourrons alors conjuguer chacun des côtés a_ib_i restés libres à l'un des côtés $a'_ib'_i$ restés libres et cela d'une manière arbitraire. Tous les côtés de P_0 se trouveront ainsi répartis en paires de côtés conjugués.

Il y a encore une condition pour que P_0 puisse engendrer un groupe discontinu; c'est que si l'on répartit ses sommets en cycles, la somme des angles de chaque cycle soit une partie aliquote de 2π. Si cette condition est remplie, P_0 engendrera un groupe fuchsien qui sera un sous-groupe de G. On obtiendra d'ailleurs de la sorte tous les sous-groupes d'indice fini de G.

Soient maintenant:

$$(1) \qquad X = F_1(z), \quad Y = F_2(z), \quad F_3(z), \ \ldots$$

les fonctions fuchsiennes engendrées par G et

$$(2) \qquad x = f_1(z), \quad y = f_2(z), \quad f_3(z), \ \ldots$$

les fonctions fuchsiennes engendrées par g. La classe des fonctions fuchsiennes (2) contiendra la classe des fonctions (1) tout entière comme cas particulier.

Supposons d'abord que G et g soient tous deux de genre 0. Alors toutes les fonctions (1) s'expriment rationnellement en X, toutes les fonctions (2) rationnellement en x. On en conclut que X est une fonction rationnelle de x. Il est d'ailleurs facile de trouver les coëfficients de cette fonction rationnelle, quand on connaît les valeurs de X pour les différents sommets de R_0.

Si maintenant G est de genre 0 et g de genre p, toutes les fonctions (1) sont rationnelles en X et X est rationnel en x et en y.

Il peut arriver enfin que ni G, ni g ne soient de genre 0. Dans ce cas X et Y sont rationnels en x et y et la réciproque n'est pas vraie.

Il est à remarquer que cette théorie est tout à fait analogue à celle de la transformation des fonctions elliptiques. Qu'est-ce en effet que cette transformation? Elle consiste à étudier la relation qui a lieu entre les fonctions elliptiques engendrées par le groupe

$$(3) \quad (z, \ m\omega_1 + n\omega_2) \quad (\omega_1, \ \omega_2 \text{ périodes données; } m, n \text{ entiers quelconques})$$

et les fonctions elliptiques engendrées par le groupe

$$(4) \qquad (z, \ m\Omega_1 + n\Omega_2)$$

en choisissant ces nouvelles périodes Ω_1, Ω_2 de telle sorte que ce second groupe soit un sous-groupe du premier. Remarquons également que si l'on applique ces principes aux fonctions fuchsiennes engendrées par l'équation de la série hypergéométrique, on retrouvera sans peine les résultats obtenus par M. Goursat dans sa remarquable thèse.

Dans le cas particulier où g est un sous-groupe distingué, la subdivision de P_0 en $n+1$ polygones R est régulière, même après qu'on a plié et déformé P_0 de façon à recoller ensemble les côtés conjugués et à faire de ce polygone une surface fermée. De plus les relations entre X, Y, x et y sont d'une nature particulière. Ainsi, si par exemple G et

y sont tous deux de genre o, le groupe de l'équation algébrique qui lie X et x est une seule fois transitif.

Considérons en particulier un exemple qui nous sera utile dans la suite. Supposons que R_0 soit un polygone

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1}\beta_n\beta_{n-1} \ldots \beta_3\beta_2$$

symétrique par rapport à sa diagonale $\alpha_1\alpha_{n+1}$ de telle sorte que β_i soit symétrique de α_i. Je suppose de plus que les côtés symétriques sont conjugués et que tous les sommets sont sur le cercle fondamental et tous les angles nuls. Soit $X = F(z)$ une des fonctions fuchsiennes engendrées par R_0 et à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. On aura pu choisir $F(z)$ de telle façon que cette fonction reste réelle sur tout le périmètre de R_0 et sur la diagonale $\alpha_1\alpha_{n+1}$. (Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* Acta Mathematica, T. 1, p. 232 et 272.)

Cette fonction donnera alors la représentation conforme du polygone

$$r_0 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_1$$

sur un demi-plan. Soit maintenant R_1 le transformé de R_0 par la substitution qui change $\beta_i\beta_{i+1}$ en $\alpha_i\alpha_{i+1}$. Ce polygone sera symétrique de R_0 par rapport à $\alpha_i\alpha_{i+1}$. Considérons maintenant le polygone $P_0 = R_0 + R_1$ et regardons comme conjugués deux côtés de ce polygone s'ils sont symétriques par rapport à $\alpha_i\alpha_{i+1}$. Tous les cycles de ce polygone étant paraboliques, il engendrera un système de fonctions fuchsiennes. Je choisirai parmi elles une de celles à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et qui de plus restent réelles sur tout le périmètre de R_0 et de R_1.

Je l'appellerai $x = f(z)$. Cette fonction donnera la représentation conforme sur un demi-plan, non plus de r_0 comme dans le cas précédent, mais du polygone R_0 tout entier.

Pour achever de définir x je supposerai:

$$f(\alpha_1) = 0, \qquad f(\alpha_{n+1}) = \infty$$

et j'aurai:

$$x = \pm \sqrt{\frac{X - F(\alpha_1)}{X - F(\alpha_{n+1})}}.$$

Nous pourrons prendre indifféremment le signe $+$ ou le signe $-$.

Poussons la chose plus loin. Soit P_1 le polygone symétrique de P_0 par rapport à un de ses côtés que j'appelle C. Soit $Q_0 = P_0 + P_1$ et regardons comme conjugués deux côtés de Q_0 symétriques par rapport à C. Soit y une fonction fuchsienne engendrée par Q_0 et à l'aide de laquelle toutes les autres s'expriment rationnellement. Je suppose que y soit réel le long du périmètre de Q_0 et par conséquent le long de C.

Je pose d'ailleurs:

$$y = \varphi(z), \qquad \varphi(\alpha_i) = 0, \qquad \varphi(\alpha_{i+1}) = \infty$$

d'où:

$$y = \sqrt{\frac{x - f(a_i)}{x - f(a_{i+1})}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{X - F(a_1)}{X - F(a_{n+1})}} - \sqrt{\frac{F(a_i) - F(a_1)}{(F(a_i) - F(a_{n+1})}}}{\sqrt{\frac{X - F(a_1)}{X - F(a_{n+1})}} - \sqrt{\frac{F(a_{i+1}) - F(a_1)}{F(a_{i+1}) - F(a_{n+1})}}}}.$$

Cet exemple montre quelle est la nature des relations qui existent entre les fonctions fuchsiennes dérivées d'un groupe fuchsien G et celles qui dérivent d'un sous-groupe de G.

Nous allons maintenant dire quelques mots des groupes distingués d'indice fini ou infinj. Voici comment on peut être conduit à envisager de tels groupes. Soit

$$(5) \qquad \frac{d^p w}{dx^p} + \varphi_{p-1}\frac{d^{p-1}w}{dx^{p-1}} + \ldots + \varphi_0 w = 0$$

une équation linéaire où les coëfficients φ soient rationnels en x. Supposons que les points singuliers de cette équation soient:

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

et de telle façon que les racines de l'équation déterminante relative à a_i soient toutes des multiples de $\frac{1}{K_i}$, K_i étant un entier positif. Si on ne peut trouver aucun nombre entier tel que ces racines soient multiples de $\frac{1}{K_i}$, on fera $K_i = \infty$.

Nous pourrons en vertu des § 8 à 14, trouver une équation fuchsienne:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \phi(x)v \tag{6}$$

admettant pour points singuliers

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

et de telle façon que la différence des racines de l'équation déterminante relative à a_i soit $\frac{1}{K_i}$. Cette équation fuchsienne appartiendra à un type fuchsien que j'appelle T.

Soit z le rapport des intégrales; x sera une fonction fuchsienne de z et j'appelle G le groupe de cette fonction. Les intégrales

$$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_p$$

de l'équation (5) sont des fonctions uniformes de z. Soit S une substitution de G. Quand nous appliquerons à z cette substitution, les intégrales w deviendront:

$$w_1^1, w_2^1, w_3^1, \ldots, w_p^1$$

et il est clair que les w_i^1 sont des fonctions linéaires des w_i; j'appellerai Σ la substitution linéaire qui fait passer des w_i aux w_i^1 et j'écrirai pour abréger:

$$w(z \,.\, S) = [w(z)]\Sigma. \tag{7}$$

Cette équation exprimera que quand z subit la substitution S, les w subissent la substitution Σ.

Les substitutions Σ formeront un groupe Γ qui sera isomorphe à G; mais cet isomorphisme pourra être holoédrique ou mériédrique. S'il est mériédrique, il y aura une infinité de substitutions:

$$S_1, S_2, \ldots, S_p, \ldots \tag{8}$$

du groupe G auxquelles correspondra la substitution unité dans le groupe Γ. Ces substitutions (8) formeront un sous-groupe g du groupe G. Je dis que ce sous-groupe est distingué. En effet soit s une substitution de

G ne faisant pas partie de g, et σ la substitution correspondante du groupe Γ. Soit S_1 une substitution de g; je dis que $s^{-1}S_1 s$ fera aussi partie de g. En effet nous aurons:

$$w(zS_1) = w(z)$$
$$w(zs^{-1}S_1) = w(zs^{-1})$$
$$w(zs) = [w(z)]\sigma$$
$$w(zs^{-1}S_1 s) = [w(zs^{-1}S_1)]\sigma = [w(zs^{-1})]\sigma$$
$$w(z) = w(zs^{-1}s) = [w(zs^{-1})]\sigma$$

ou enfin

$$w(zs^{-1}S_1 s) = w(z).$$

C. Q. F. D.

Nous sommes ainsi conduits à envisager des groupes g distingués et à indice fini ou infini et des fonctions w de z qui ne sont pas altérées par les substitutions de ces sous-groupes. Supposons que l'équation (5) s'intègre algébriquement, alors le groupe des substitutions Σ est d'ordre fini; donc g est un sous-groupe d'indice fini. Ainsi la question de l'intégration algébrique des équations linéaires se ramène à celle des sous-groupes distingués d'indice fini et de la transformation des fonctions fuchsiennes. Nous nous occuperons de tout cela plus tard.

Lorsque g est d'indice infini, on peut trouver néanmoins quelque chose d'analogue au polygone générateur d'un groupe fuchsien. Soient en effet

$$(9) \qquad 1,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ \ldots,\ s_p,\ \ldots$$

une infinité de substitutions de G, choisies de telle sorte que si

$$(10) \qquad 1,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \ldots,\ \sigma_p,\ \ldots$$

sont les substitutions correspondantes de Γ, le tableau (10) contienne chacune des substitutions de Γ et ne la contienne qu'une fois.

Soient maintenant

$$R_0,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ \ldots,\ R_p,\ \ldots$$

les polygones analogues à R_0 et correspondant aux diverses substitutions du tableau (9). L'ensemble de ces polygones formera une région Q_0 qui sera une sorte de polygone générateur du groupe g.

Si en particulier l'équation (5) est du 2^d ordre et que nous appelions t le rapport des intégrales, t sera une fonction uniforme de z, inaltérée par les substitutions de g. Supposons maintenant que (5) appartienne au type T et que x soit une fonction kleinéenne de t n'existant que dans un de ces domaines D dont la limite n'est pas une courbe analytique et dont il a été question dans le *Mémoire sur les groupes kleinéens*. Alors le groupe g se réduira à la substitution unité et t ne pourra prendre qu'une fois et une seule chacune des valeurs intérieures à D. La relation entre t et z nous donne alors la représentation conforme de D sur un cercle.

J'arrive au point le plus important. Je suppose que (5) soit une équation fuchsienne appartenant à un type T' et que le type T soit subordonné à T'. Alors x est fonction fuchsienne de t. Il arrive alors que t est fonction uniforme de z inaltérée par g. Elle peut prendre toutes les valeurs intérieures au cercle fondamental et n'en peut prendre d'autres. Elle ne peut prendre d'ailleurs chacune d'elles qu'une seule fois à l'intérieur de Q_0, mais elle peut prendre chacune d'elles une infinité de fois à l'intérieur du cercle fondamental.

Il reste à examiner ce qui se passe quand les coëfficients φ de l'équation (5) au lieu d'être rationnels en x, sont rationnels en x et y, ces deux variables étant liées par la relation:

$$\theta(x, y) = 0. \tag{11}$$

Je vais considérer une équation (6)

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \psi(x)v \tag{6}$$

où ψ est rationnel en x et qui admet pour points singuliers non seulement ceux de l'équation (5) mais encore ceux de l'équation (11), c'est à dire les valeurs de x pour lesquelles $\frac{d\theta}{dy} = 0$. Si b est un point singulier de cette espèce et si dans le voisinage de ce point singulier λ valeurs de y se permutent entre elles de la manière bien connue, la différence des

racines de l'équation déterminante de (6) devra être $\frac{1}{K}$, K étant un multiple de λ. Remarquons bien ce qui suit pour éviter toute confusion; à chaque valeur de x correspondent plusieurs points de la surface de Riemann (11). Si l'un de ces points est un point singulier de (5), en général il n'en sera pas de même des autres, et cependant tous ces points analytiques sont alors des points singuliers de (6); car $\varphi(x)$ est rationnel en x et indépendant de y et par conséquent, il n'y a pas lieu de s'inquiéter de savoir à quel feuillet de la surface de Riemann, appartient le point analytique correspondant.

Cela posé, soit G le groupe de l'équation (6), z le rapport des intégrales, x sera une fonction fuchsienne de z; y sera une fonction uniforme de z, mais elle ne restera pas inaltérée par toutes les substitutions de G. Si j'appelle g' le groupe formé par toutes les substitutions de G qui n'altèrent pas y, ce groupe sera un sous-groupe d'indice fini de G; mais il ne sera pas distingué en général. (À moins que le groupe de l'équation algébrique (11) ne soit une seule fois transitif.)

Si au contraire je considère à la fois les m valeurs de y qu'on peut tirer de l'équation (11) en la supposant de degré m en y, et si j'appelle g'' le groupe formé par les substitutions de G qui n'altèrent *aucune* de ces m valeurs, g'' sera un sous-groupe distingué.

Appelons enfin g le groupe formé par les substitutions de G qui n'altèrent pas les intégrales de l'équation (5), ce sera un sous-groupe d'ordre fini de G et de g'. Considéré comme sous-groupe de G, il ne sera pas distingué; comme sous-groupe de g', il sera distingué.

Nous pourrons regarder le groupe g' comme engendré par un polygone P'_0 formé par la réunion de m polygones transformés de R_0; le groupe g sera engendré par une région Q_0 formée par la réunion d'une infinité de polygones transformés de P'_0. Quant à g'', il sera engendré par un polygone P''_0 formé par la réunion de ω polygones transformés de R_0, ω étant l'ordre du groupe de l'équation algébrique (11). Si ce dernier groupe est une seule fois transitif, $\omega = m$ et g' et g'' ne diffèrent pas l'un de l'autre.

§ 17. *Troisième problème. Types symétriques.*

On a vu au § 10 avec quelle facilité on démontre que tout type fuchsien symétrique contient une équation fuchsienne; nous allons faire voir maintenant comment on peut calculer, avec une approximation indéfinie, les coëfficients de cette équation.

Considérons un type symétrique T:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \phi(x)v. \tag{1}$$

$\phi(x)$ étant rationnel en x, tous les points singuliers de cette équation sont réels et toutes les équations déterminantes ont une racine double. Soient:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

les points singuliers réels en question. Au lieu de supposer que ces points singuliers sont réels, nous supposerons qu'ils sont tous situés sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. Il est aisé en effet de passer d'un cas à l'autre par un changement linéaire de la variable x. Il s'agit de déterminer les coëfficients restés arbitraires dans l'équation (1) de telle façon que cette équation soit fuchsienne. Supposons le problème résolu. Soit z le rapport des intégrales. La variable x sera une fonction fuchsienne de z et le polygone générateur R_0 de cette fonction sera symétrique et aura tous ses sommets sur le cercle fondamental. Il sera partagé par une de ses diagonales en deux polygones symétriques r_0 et r_0'. Je suppose que le centre du cercle fondamental soit intérieur à r_0 et j'appelle b un certain point que je suppose *réel* et intérieur également à r_0. La fonction:

$$x = f(z)$$

sera une des fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement. J'achèverai de la définir par les conditions suivantes:

$\operatorname{mod} x = 1$,	quand z est situé sur le périmètre de r_0
$x = 0$,	pour $z = 0$
$\arg x = 0$,	pour $z = b$.

La fonction $x = f(z)$ nous donne alors la représentation conforme du polygone r_0 sur le cercle de centre 0 et de rayon 1. Cela posé, soient R_1, R_2, ... les divers transformés de R_0 par le groupe engendré par ce polygone. Ces polygones rempliront tout le cercle fondamental et chacun d'eux sera subdivisé en deux parties symétriques r_1 et r'_1, r_2 et r'_2, etc. Considérons un certain nombre de polygones r_i et r'_k dont l'ensemble forme un seul tout simplement connexe. Soit P_0 le polygone formé pas cet ensemble. Considérons la fonction

$$y = \theta(z)$$

qui donne la représentation conforme de P_0 sur le cercle de centre 0 et rayon 1. Pour achever de définir y, je suppose:

$$\theta(0) = 0, \qquad \arg \theta(b) = 0.$$

Cette fonction $\theta(z)$ sera une fonction fuchsienne dont le groupe g sera un sous-groupe du groupe G de la fonction $f(z)$. Il résulte de là que x est une fonction $\varphi(y)$ rationnelle en y. Il est d'ailleurs facile (et nous reviendrons sur ce point un peu plus loin) de trouver les coëfficients de la fonction $\varphi(y)$, quand on connaît les points singuliers a et la situation relative des différents polygones r_i et r'_k dont l'ensemble constitue P_0. Or les quantités a nous sont données et nous pouvons disposer arbitrairement de la situation relative des polygones r_i et r'_k. Les coëfficients de la fonction rationnelle $\varphi(y)$ peuvent donc être regardés comme connus.

Nous pourrons toujours, à la condition de prendre un assez grand nombre de polygones r_i et r'_k, choisir ces polygones de telle sorte que le cercle de centre 0 et de rayon ρ soit tout entier intérieur à P_0, et cela quelque grand que soit ρ pourvu, bien entendu, que ce rayon reste inférieur à 1. On aura alors l'inégalité suivante:

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} y < \frac{\operatorname{mod} z}{\rho}.$$

On pourra donc choisir un rayon ρ suffisamment voisin de 1 et par conséquent un polygone P_0 suffisamment grand pour que la différence entre $\operatorname{mod} z$ et $\operatorname{mod} y$ soit aussi petite que l'on veut. En d'autres termes quand ρ tend vers l'unité on a

$$\lim \operatorname{mod} y = \operatorname{mod} z.$$

Mais ce n'est pas tout. Soit:

$$z = \xi + i\eta, \qquad u = \log \operatorname{mod} \frac{y}{z}, \qquad v = \arg \frac{y}{z}$$

Supposons que z soit un certain point tel que:

$$\operatorname{mod} z < \rho_1 < \rho < 1$$

ρ_1 étant une quantité positive convenablement choisie.

Nous aurons à l'intérieur du cercle de rayon ρ

$$0 < u < \log \frac{1}{\rho}.$$

On en conclut qu'à l'intérieur du cercle de rayon ρ_1, on a

$$\left| \frac{du}{d\xi} \right| < \frac{4 \log \left(\frac{1}{\rho} \right)}{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right)^2} > \left| \frac{du}{d\eta} \right|.$$

Mais:

$$\frac{du}{d\xi} = - \frac{dv}{d\eta}, \qquad \frac{du}{d\eta} = \frac{dv}{d\xi}.$$

On en conclut que $\frac{dv}{d\xi}$ et $\frac{dv}{d\eta}$ tendent *uniformément* vers 0 quand ρ tend vers 1. Or pour $z = b$, on a $v = 0$; on peut donc écrire:

$$v = \int_b^z \left\{ \frac{dv}{d\xi} d\xi + \frac{dv}{d\eta} d\eta \right\}$$

d'où l'on conclut:

$$\lim v = 0, \qquad \text{pour } \lim \rho = 1$$

et

$$\lim (u + iv) = 0$$

$$\lim \frac{y}{z} = 1, \qquad \lim y = z.$$

Je vais maintenant démontrer que pour une valeur quelconque de z, la limite de la fonction rationnelle $\varphi(z)$ (qui n'est autre que $\varphi(y)$ où y est remplacé par z) est précisement la fonction fuchsienne $f(z)$. Nous avons

$$y = \theta(z).$$

Posons de même

$$z = \theta(z_1).$$

Je dis que

$$\lim z_1 = z.$$

En effet lorsque z est à l'intérieur du cercle de centre o et de rayon ρ_1, nous avons:

$$\operatorname{mod} \frac{dy}{dz} > 1 - \frac{\log\left(\frac{1}{\rho}\right)\sqrt{32}}{\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho}\right)^2}.$$

J'appelle pour abréger K le second membre de cette inégalité. Or nous avons:

$$\operatorname{mod} z < \operatorname{mod} y$$

et par conséquent

$$\operatorname{mod} z_1 < \operatorname{mod} z < \rho_1.$$

Il vient donc

$$|z_1 - z| < |y - z| \frac{1}{K}.$$

Or

$$\lim |y - z| = 0 \quad \text{donc} \quad \lim |z - z_1| = 0.$$

Nous avons d'ailleurs:

$$\varphi(z) = f(z_1).$$

Mais $f(z)$ est une fonction continue et comme la différence $z - z_1$ tend vers o, nous aurons:

$$\lim f(z_1) = f(z)$$

ou

$$\lim \varphi(z) = f(z).$$

C. Q. F. D.

On démontrerait de même que la limite de la dérivée n^e de $\varphi(z)$ est la dérivée n^e de $f(z)$.

Il s'agit de profiter de ce qui précède pour calculer les coëfficients restés arbitraires dans l'équation (1). Soit p le nombre de ces coëfficients que nous appellerons pour abréger les coëfficients c. Soient v_1 et v_2 deux intégrales de l'équation (1) définie comme il suit:

$$\text{pour } x = 0, \qquad v_1 = 0, \qquad \frac{dv_1}{dx} = 1$$

$$\text{pour } x = 0, \qquad v_2 = 1, \qquad \frac{dv_2}{dx} = 0.$$

Le rapport $\frac{v_1}{v_2}$ est alors une fonction de x parfaitement définie. Calculons dans le développement de cette fonction les coëfficients de

$$x^2, \; x^3, \; x^4, \; \ldots, \; x^{p+3}.$$

Ces $p+2$ coëfficients s'exprimeront rationnellement en fonctions des coëfficients c et des points singuliers a. Mais nous aurons

$$(2) \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\alpha z}{z+\gamma}$$

α et γ étant deux constantes que nous ne connaissons pas encore. Nous avons dans l'identité (2) une relation entre $x = f(z)$ et z. On peut en tirer les $p+2$ premiers coëfficients du développement de $f(z)$ suivant les puissances de z en fonctions rationnelles de α, de γ, des c et des a. On peut donc avoir réciproquement les c, α et γ en fonctions rationnelles des a et des $p+2$ premiers coëfficients du développement de $f(z)$. Or les a nous sont donnés, les coëfficients du développement de $f(z)$ peuvent aussi être regardés comme connus puisque ce sont les limites des coëfficients du développement de $\varphi(z)$; les coëfficients c peuvent donc aussi être calculés avec une approximation indéfinie.

On peut se proposer, au lieu de calculer les coëfficients de l'équation (1), de trouver directement le groupe de cette équation. Voici comment on peut opérer.

Supposons que x décrive dans le sens positif un contour fermé autour du point singulier a_i; z se changera en $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$, la substitution

$$S_i = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

étant parabolique; en même temps y se changera en y_i. Si la valeur initiale de z est o, sa valeur finale sera: $\frac{\beta_i}{\delta_i} = \lambda_i$; si la valeur initiale de y est o, sa valeur finale s'appellera μ_i. La connaissance de λ_i suffit pour déterminer la substitution S_i; mais quand on connait la fonction rationnelle $\varphi(y)$ la détermination de μ_i n'est qu'une question d'algèbre. On a d'ailleurs:

$$\lambda_i = \lim \mu_i.$$

On déterminera ainsi toutes les substitutions S_i et par conséquent le groupe G. Il y a d'autre part entre les λ_i une relation algébrique qui facilitera le calcul.

Il reste maintenant à entrer plus profondément dans la question et à voir comment on peut effectivement calculer les coëfficients de la fonction rationnelle $\varphi(y)$. Le calcul dépend naturellement du choix des polygones r_i et r'_k dont l'ensemble constitue P_0. Mais ce choix est lui-même à peu près arbitraire et nous sommes forcés pour fixer les idées, de choisir certains exemples particuliers. Il est bien entendu que ce ne sont là que des exemples, et nous ne voulons pas dire que le choix que nous allons faire soit le meilleur et le plus simple. Il est même probable que l'expérience et la pratique conduiront à faire un choix différent.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les sommets de r_0 correspondant respectivement aux points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Considérons le polygone P_0^1 formé de r_0 et du polygone symétrique de r_0 par rapport à l'un de ses côtés, à $\alpha_1\alpha_n$ par exemple. Appelons y_1 la fonction y qui est engendrée par ce polygone P_0^1, et z_1 une fonction liée à y_1 par une relation linéaire convenablement choisie et dont nous déterminerons plus tard les coëfficients. Nous aurons alors:

$$z_1 = \sqrt{\frac{x - a_1}{x - a_n}}, \qquad y_1 = \frac{A_1 z_1 + B_1}{C_1 z_1 + D_1}.$$

Considérons maintenant un polygone P_0^2 formé de P_0^1 et du polygone symétrique de P_0^1 par rapport à un de ses côtés que j'appelle C. J'appelle y_2 et z_2 des fonctions qui sont à P_0^2 ce que y_1 et z_1 sont à P_0^1 et j'appelle b et c les valeurs de z_1 aux extrémités du côté C. Nous aurons alors:

$$z_2 = \sqrt{\frac{z_1 - c}{z_1 - d}}, \qquad y_2 = \frac{A_2 z_2 + B_2}{C_2 z_2 + D_2}.$$

On opérera sur P_0^2 comme on a opéré sur P_0^1 et ainsi de suite ad inf. On calculera ainsi successivement les valeurs de

$$z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots$$

Pour passer de z_i à y_i, il faut connaître les coëfficients de la relation linéaire:

$$y_i = \frac{A_i z_i + B_i}{C_i z_i + D_i}.$$

On déterminera ces coëfficients de telle façon que y_i s'annulle avec x, ait son module égal à 1 en même temps que x, et soit réel pour une certaine valeur réelle de x.

Il reste encore quelque chose d'arbitraire dans le mode de génération des polygones P_0^1, P_0^2, ... Pour former P_0^i à l'aide de P_0^{i-1}, on annexe à ce polygone son symétrique par rapport à un de ses côtés C; comment choisir ce côté C? Il conviendra de choisir celui des côtés de P_0^{i-1} dont on suppose que la longueur géométrique doit être la plus grande.

Je repète que je n'ai voulu donner ici qu'un exemple et que mon intention n'est pas de recommander ce mode de génération des polygones P_0 de préférence à tout autre. Je crois au contraire qu'il serait plus avantageux de s'arranger de façon que le groupe de la fonction fuchsienne $\theta(z)$ soit toujours un sous-groupe distingué de G.

Dirigé de la sorte, le calcul des coëfficients c de l'équation (1) ne laisserait pas d'être assez long si l'on voulait pousser l'approximation très-loin. Mais on peut pour la plupart des applications se contenter d'une approximation grossière. En effet si les coëfficients c, au lieu d'avoir exactement les valeurs qui conviendraient à l'équation fuchsienne, sont seulement suffisamment voisins de ces valeurs, la variable x n'est plus

fonction fuchsienne du rapport z des intégrales, mais elle en est encore fonction kleinéenne, ce qui suffit dans presque tous les cas.

Voici comment ce que l'on vient de voir peut s'appliquer au cas des types non symétriques. Soit:

(3) $$\frac{d^2v}{dx^2} = \psi(x, y)v$$ (4) $$\theta(x, y) = 0$$

une équation appartenant à un type T. Ce type contient une équation fuchsienne et, si j'appelle t le rapport des intégrales de cette équation fuchsienne, les variables x et y seront des fonctions fuchsiennes de t. Mais nous ne nous proposons pas pour le moment de trouver les coëfficients de cette équation fuchsienne elle-même; nous voulons seulement trouver une équation fuchsienne dans un type T' subordonné à T. Pour cela soit:

(5) $$a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n$$

le tableau des points singuliers de l'équation (3) et de ceux de la relation (4). Nous avons vu au § 11 qu'il existe toujours une équation fuchsienne

(6) $$\frac{d^2v}{dx^2} = F(x)v$$

où $F(x)$ est rationnel et qui admet pour points singuliers non seulement les n quantités données (5), mais encore k autres quantités non données $b_1, b_2, \ldots, b_k$. De plus toutes les équations déterminantes ont une racine double.

Or, si l'on se reporte à ce qui a été dit dans ce § 11, on verra que nous avons formé cette équation (6) à l'aide d'une autre équation fuchsienne dont tous les points singuliers étaient réels et qui, par conséquent, appartenait à un type symétrique. D'ailleurs nous venons de voir que les coëfficients d'une équation fuchsienne contenue dans un type symétrique donné peuvent être regardés comme connus. Il en sera donc de même de ceux de l'équation (6).

Cela posé, soit z le rapport des intégrales de (6); x sera une fonction fuchsienne de z, ayant pour groupe G. D'ailleurs y sera une fonction uniforme de z. Si g' est le groupe des substitutions de G qui n'altèrent

pas y (cf. § précédent), y sera une fonction fuchsienne de z ayant pour groupe g'; le groupe g' engendrera alors une équation fuchsienne qui ne sera autre que:

(6) $$\frac{d^2v}{dx^2} = F(x)v \qquad \text{avec la relation} \qquad (4) \quad \theta(x, y) = 0.$$

Cette nouvelle équation fuchsienne (que je regarde comme différente de l'équation (6) non accompagnée de la relation (4)) fera partie d'un type T'' subordonné à T' et nous avons vu que ses coëfficients sont connus. Le problème que nous nous proposions est donc résolu.

§ 18. *Troisième problème; cas général.*

Reprenons les équations (3), (4) et (6) du § précédent. Appelons R_0 le polygone générateur de G, P_0 celui de g'. Le groupe g formé des substitutions de g' qui n'altèrent pas les intégrales de l'équation (3) est un sous-groupe distingué de g'. Il est parfaitement déterminé et il est engendré par une région Q_0 qui joue le rôle de polygone générateur, mais qui a une infinité de côtés. Ces côtés sont conjugués deux à deux de telle façon qu'un côté soit le transformé de son conjugué par une des substitutions du groupe g. Deux points appartenant à ces deux côtés conjugués seront dits *correspondants* lorsque l'un d'eux sera le transformé de l'autre par cette substitution.

Maintenant il s'agit de déterminer les coëfficients restés arbitraires dans l'équation (3) de telle façon que cette équation soit fuchsienne. Soit t le rapport des intégrales de l'équation (3) supposée fuchsienne et z le rapport des intégrales de l'équation (6); *il s'agit de déterminer t en fonction de z.*

Je suppose pour déterminer complètement t, qu'il s'annulle en même temps que z. Alors t sera une fonction uniforme de z, inaltérée par les substitutions de g et de telle sorte que

$$\operatorname{mod} t < 1.$$

En outre t pourra prendre toutes les valeurs dont le module est inférieur à 1.

Ceci étant posé, je dis que l'on a l'identité suivante

$$(7) \qquad \log \operatorname{mod} \frac{1}{t} = \sum_i \log \operatorname{mod} \frac{\gamma_i z + \delta_i}{\alpha_i z + \beta_i}.$$

Dans cette identité, les substitutions $\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ sont les substitutions de g et le signe Σ se rapporte à toutes les substitutions de ce groupe. Cela posé, considérons une infinité de cercles

$$C_1, \; C_2, \; \ldots, \; C_n, \; \ldots$$

ayant tous pour centre le point o et dont les rayons $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ vont en croissant avec n et tendent vers 1 quand n croît indéfiniment.

Parmi les termes de la série (7), il y en aura un certain nombre p qui deviendront infinis à l'intérieur du cercle C_n. J'appelle leur somme θ_n. Il s'agit de démontrer que

$$\lim \theta_n = \log \operatorname{mod} \frac{1}{t} \qquad \text{pour} \quad n = \infty.$$

Je remarque de plus que $\log \operatorname{mod} \frac{1}{t}$, le terme général de la série (7) $\log \operatorname{mod} \frac{\gamma_i z + \delta_i}{\alpha_i z + \beta_i}$, et par conséquent θ_n sont essentiellement *réels* et *positifs*.

Soit

$$z = \xi + i\eta;$$

soit u_n une fonction réelle de ξ et de η qui à l'intérieur de C_n satisfasse à l'équation :

$$(8) \qquad \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \frac{d^2 u}{d\eta^2} = 0,$$

qui soit nulle le long de la circonférence de ce cercle, et qui enfin soit telle que la différence

$$\log \operatorname{mod} \frac{1}{t} - u_n$$

soit holomorphe à l'intérieur de ce même cercle. Nous aurons les inégalités:

$$0 < u_n < \log \bmod \frac{1}{t}$$

et de plus

$$u_n < u_{n+1}$$

et on en conclut que u_n est constamment croissant avec n et constamment inférieur à $\log \bmod \frac{1}{t}$, ce qui veut dire que pour $n = \infty$, u_n tend vers une limite finie que j'appelle u.

J'ai inséré dans un des derniers Bulletins de la Société Mathématique de France (Paris, Gauthier-Villars 1883) un petit travail intitulé »*Sur un théorème de la théorie générale des fonctions*« dans lequel je démontre que si y est une fonction quelconque non uniforme de x, on peut toujours trouver une variable z telle que x et y soient des fonctions uniformes de z. On n'a qu'à répéter ici la suite des raisonnements que j'ai faits dans ce travail pour voir que u est une fonction analytique de ξ et de η et qu'on peut trouver une seconde fonction v de ξ et de η telle que $u + iv$ soit une fonction analytique monogène de z. On aura d'ailleurs l'inégalité:

$$\log \bmod \frac{1}{t} \geqq u.$$

Il s'agit de faire voir que c'est le signe $=$ qu'il faut prendre et non le signe de l'inégalité $>$. Pour cela, étudions de plus près la fonction u. Je dis que cette fonction n'est pas altérée par les substitutions de g. En effet soit:

$$S = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

l'une de ces substitutions et posons:

$$u'_n(z) = u_n\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

Il y a une autre manière de définir la fonction u'_n. En effet soit C'_n le cercle transformé de C_n par la substitution inverse de S. La fonction

u'_n satisfera comme u_n à l'équation (8); elle sera nulle le long de C'_n et la différence:

$$\log \operatorname{mod} \frac{1}{t} - u'_n$$

sera holomorphe à l'intérieur de ce cercle.

Nous aurons donc une infinité de cercles:

$$C''_1, C''_2, \ldots, C''_n, \ldots$$

et une infinité de fonctions

$$u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots$$

engendrées à l'aide de ces cercles comme les u_i le sont à l'aide des cercles C_i. Nous aurons d'ailleurs

$$\lim u'_n(z) = u\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) \qquad \text{pour} \quad n = \infty.$$

Cela posé quelque grand que soit n, on pourra trouver un cercle C''_p tout entier extérieur à C_n et un cercle C_q tout entier extérieur à C'_p. On aura alors:

$$u_n(z) < u'_p(z) < u_q(z).$$

Mais pour $n = \infty$, on a $p = q = \infty$. Donc:

$$\lim u_n = \lim u_q = u$$

donc:

$$\lim u'_p(z) = u(z)$$

et enfin

$$u(z) = u\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right).$$

C. Q. F. D.

On en conclut

$$v\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = v(z) + \text{const.}$$

Considérons maintenant la fonction:

$$V = \log \operatorname{mod} \frac{1}{t} - u$$

dans le plan des t et posons:

$$t = \xi_1 + i\eta_1.$$

La fonction V sera une fonction uniforme de t. En effet quand t, après avoir décrit un contour quelconque, revient à sa valeur initiale, z est revenu à sa valeur initiale ou bien a subi une des substitutions du groupe g. Dans l'un et l'autre cas la fonction u et par conséquent V n'ont pas été altérées.

D'ailleurs V satisfait à l'équation

$$(8') \qquad \frac{d^2V}{d\xi_1^2} + \frac{d^2V}{d\eta_1^2} = 0.$$

Considérons dans le plan des t le cercle:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 = \rho^2$$

ρ étant une constante plus petite que 1.

La fonction V sera holomorphe[1] à l'intérieur de ce cercle; d'ailleurs elle sera *le long de la circonférence de ce cercle* toujours comprise entre 0 et $\log\frac{1}{\rho}$. Donc en vertu d'une propriété bien connue de l'équation (8'), on aura *à l'intérieur de ce même cercle:*

$$0 \leqq V \leqq \log\frac{1}{\rho}.$$

Mais ρ peut être choisi aussi voisin que l'on veut de l'unité; il faut donc que l'on ait:

$$V = 0$$

ou

$$\log \operatorname{mod}\frac{1}{t} = u.$$

C. Q. F. D.

---

[1] En effet il ne pourrait y avoir doute à ce sujet que pour certains points isolés qui correspondent à des sommets de R_0 situés sur le cercle fondamental. Mais on sait que si une fonction V est holomorphe à l'intérieur d'un cercle, sauf en certains points isolés pour lesquels on ne sait rien, si elle satisfait à l'équation (8'), si enfin elle est uniforme et qu'elle reste comprise entre deux limites données, cette fonction reste holomorphe même pour les points isolés en question.

Mais d'autre part nous avons les inégalités suivantes faciles à démontrer

$$\log \operatorname{mod} \frac{1}{t} > \theta_n > u_n.$$

Or pour $n = \infty$, $\lim u_n = \log \operatorname{mod} \frac{1}{t}$, on a donc aussi

$$\lim \theta_n = \log \operatorname{mod} \frac{1}{t}.$$

Ce qui démontre l'identité

$$(7) \qquad \log \operatorname{mod} \frac{1}{t} = \sum \log \operatorname{mod} \frac{\gamma_i z + \beta_i}{\alpha_i z + \delta_i}$$

qui donne t en fonction de z.

Ainsi en supposant l'existence de l'équation fuchsienne (3) et par conséquent de la fonction t, nous avons démontré que la série (7) est convergente et que la somme de cette série est précisément $\log \operatorname{mod} \frac{1}{t}$. Réciproquement, en supposant la convergence de la série (7), on pourrait démontrer que la somme de cette série définit le logarithme du module du rapport des intégrales d'une équation fuchsienne appartenant au type T. On démontrerait par conséquent que ce type contient une équation fuchsienne. Mais cette démonstration serait fort longue et serait d'ailleurs inutile.

On pourrait toutefois en faire un usage sur lequel je voudrais dire quelques mots. Soit T'' un type tel que T soit subordonné à T''; T' qui est subordonné à T, sera subordonné à T''. Supposons que l'on sache que T'' contient une équation fuchsienne; soit (3') cette équation et t_1 le rapport de ses intégrales. Soit g_1 le groupe des substitutions de G qui n'altèrent pas t_1; g sera un sous-groupe de g_1. Nous aurons d'après ce qui précède:

$$(7') \qquad \log \operatorname{mod} \frac{1}{t_1} = \sum \log \operatorname{mod} \frac{c_i z + d_i}{a_i z + b_i}$$

$\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right)$ étant la substitution générale du groupe g_1. Mais la série (7) peut s'obtenir en supprimant certains termes de la série (7'). Elle est donc convergente et par conséquent le type T contient une équation fuchsienne.

Ainsi tout type subordonné à un autre type qui contient une équation fuchsienne contient lui-même une équation fuchsienne. Ce principe dispenserait dans un très grand nombre de cas de l'application de la méthode de continuité.

§ 19. *Réflexions sur la convergence de la série précédente.*

Voici comment on pourrait chercher à démontrer directement la convergence de la série (7) du § précédent.

Au § 1 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* nous avons démontré la convergence de la série suivante:

$$\sum \operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$$

où $\left(z, \dfrac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$ est la substitution générale d'un groupe fuchsien G. En revanche, toujours dans le cas d'un groupe fuchsien, la série

$$\sum \operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2} \tag{9}$$

n'est pas convergente. Mais elle peut l'être quand il s'agit non plus d'un groupe fuchsien, mais d'un sous-groupe d'indice infini contenu dans un groupe fuchsien, par exemple du groupe g dont nous nous occupons ici.

Je dis que si la série (9) est convergente, il en est de même de la série (7). En effet soit:

$$\rho_i = \operatorname{mod} \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

nous aurons:

$$\operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2} = \frac{1 - \rho_i^2}{1 - \operatorname{mod}^2 z}$$

et:

$$\frac{\operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2}}{\log \dfrac{1}{\rho_i}} = \frac{\rho_i - 1}{\log \rho_i} \, \frac{\rho_i + 1}{1 - \operatorname{mod}^2 z}.$$

Quand i croît indéfiniment ρ_i tend vers l'unité et on a:

$$\lim \frac{\operatorname{mod} (\gamma_i z + \delta_i)^{-2}}{\log \dfrac{1}{\rho_i}} = \frac{2}{1 - \operatorname{mod}^2 z}.$$

Ainsi le rapport d'un terme de (9) au terme correspondant de (7) tend vers une limite finie, quand l'ordre du terme considéré croît indéfiniment.

Donc les deux séries sont convergentes ou divergentes en même temps.

Cela posé, soit z un point quelconque intérieur à Q_0. Considérons un cercle C dont la S soit:

(10) $$\frac{\pi}{4}(e^{2R} + e^{-2R} - 2)$$

et qui contienne à son intérieur le point z; soit $F(R)$ la S de la partie de ce cercle qui est intérieure à Q_0. Soit maintenant $f(R)$ la plus petite valeur que puisse prendre $F(R)$ quand on fait varier le cercle C, sa S restant toujours constante, et le point z restant toujours à l'intérieur de C. Alors $f(R)$ sera une fonction continue de R, croissant constamment et indéfiniment avec R.

Soit N le nombre des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ qui sont intérieurs au cercle qui a pour centre le point o et dont la S est précisément égale à l'expression (10). Nous aurons:

$$N < \frac{\pi}{4f(R)}(e^{2R} + e^{-2R} - 2).$$

Soient maintenant $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ une série de valeurs de R, positives et d'ailleurs croissant constamment et indéfiniment avec n. Soit K_n le cercle qui a pour centre le point o et dont le R est R_n. Soit U_n la somme de tous les termes de la série (9) qui correspondent à des points $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ extérieurs à K_{n-1} et intérieurs à K_n.

La série (9) pourra être remplacée par la série

(11) $$U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots$$

où nous aurons

$$U_n < K\frac{e^{2R_n} + e^{-2R_n} + 2}{f(R_n)(e^{2R_{n-1}} + e^{-2R_{n-1}} + 2)} < K'\frac{e^{2(R_n - R_{n-1})}}{f(R_n)}$$

K et K' étant deux constantes convenablement choisies.

Les séries (7), (9) et (11) seront donc convergentes si l'on peut choisir les R_n de telle façon que la série:

(12) $$\sum \frac{e^{2(R_n - R_{n-1})}}{f(R_n)}$$

soit convergente. Or c'est ce qui a lieu si l'intégrale:

$$\int_a^\infty \frac{dR}{f(R)} \tag{13}$$

a une valeur finie.

Telle est donc la condition suffisante de la convergence de la série (7). Il faudrait donc chercher à démontrer que l'intégrale (13) est finie, ce qui pourra se faire en étudiant la forme de la région Q_0.

Lorsqu'on l'aura fait, cette démonstration dispensera dans tous les cas de l'application de la méthode de continuité.

§ 20. *Résumé.*

Dans ce mémoire, après avoir montré à calculer les paramètres du groupe d'une équation linéaire donnée, j'ai exposé quelques propriétés de ces paramètres considérés comme fonctions des coëfficients de cette équation, ou inversement de ces coëfficients regardés comme fonctions des paramètres du groupe.

J'ai abordé ensuite un autre problème. Considérons une équation de la forme suivante:

(1) $\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v$ (2) $\theta(x, y) = 0$

où φ et θ sont rationnels en x et y. Je suppose que la relation (2) est donnée ainsi que les points singuliers de l'équation (1) et l'équation déterminante relative à chacun d'eux, mais que tous les autres coëfficients de l'équation (1) restent arbitraires. Je suppose de plus que la différence des racines de chaque équation déterminante est nulle ou est une partie aliquote de l'unité. J'appelle z le rapport des intégrales et je considère x comme fonction de z.

J'ai montré qu'on peut disposer *d'une manière et d'une seule* de ces coëfficients restés arbitraires de telle façon que x soit fonction fuchsienne de z, n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle et j'ai fait voir comment il fallait diriger le calcul des coëfficients.

On peut disposer de ces mêmes coëfficients *d'une infinité de manières* de telle façon que x soit fonction kleinéenne de z *n'existant pas dans tout le plan.* Enfin on peut encore disposer de ces coëfficients *d'une manière*

et d'une seule, de telle sorte que x soit fonction fuchsienne ou kleinéenne de z, *existant dans toute l'étendue du plan.* Ce dernier point n'a pas été démontré; il faudrait pour le faire appliquer la méthode de continuité.

Considérons maintenant une équation linéaire quelconque:

$$\frac{d^m v}{dx^m} = \sum \varphi_\nu \frac{d^\nu v}{dx^\nu}, \qquad \theta(x, y) = 0$$

les φ et θ étant rationnels en x et y. Soient $v_1, v_2, \ldots, v_m$ les intégrales de cette équation. On peut trouver une variable z de telle façon que z soit le rapport des intégrales d'une équation du second ordre à coëfficients rationnels en x et y, et que $v_1, v_2, \ldots, v_m$ ainsi que x et y soient des fonctions uniformes de z. Il peut arriver d'ailleurs que x, considéré comme fonction de z, soit ou une fonction rationnelle, ou une fonction doublement périodique, ou une fonction fuchsienne n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle, ou une fonction kleinéenne n'existant pas dans tout le plan, ou enfin une fonction fuchsienne ou kleinéenne existant dans tout le plan. Nous laisserons de côté ce dernier cas.

Alors, ce dernier cas étant laissé de côté, on pourra choisir cette variable z d'une infinité de manières en satisfaisant à toutes les conditions énoncées plus haut. J'appelle $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ les différentes variables z obtenues de la sorte. Mais parmi toutes ces variables, on peut en choisir une et une seule que j'appelle z_1 et qui est plus simple que toutes les autres. En général x sera fonction fuchsienne de z_1 (n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle) mais dans certains cas particuliers, elle pourra en être fonction rationnelle ou doublement périodique. Dans tous les cas z_1 sera fonction uniforme des autres variables $z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ce qui explique pourquoi x, y et les v qui sont uniformes en z_1 sont aussi uniformes en $z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$

Ainsi nous pouvons exprimer les intégrales d'une équation linéaire à coëfficients algébriques par des fonctions uniformes d'une variable z.

Il reste à étudier les propriétés de ces fonctions uniformes et à les développer en séries. C'est ce que je ferai dans le prochain mémoire qui sera le dernier de cette série.

Paris, 20 Octobre 1883.

Corrections et additions aux trois mémoires antérieurs. [1]

THÉORIE DES GROUPES FUCHSIENS.

P. 54 l. 14 et 15, au lieu de: les substitutions S_1, S_4, S_5, S_3 s'écriront, lire: les substitutions S_1, S_4^{-1}, S_5^{-1}, S_3^{-1} s'écriront.

P. 54 l. 18, au lieu de: la combinaison des quatre substitutions S_3, S_5, S_4, S_1, lire: la combinaison des quatre substitutions S_3^{-1}, S_5, S_4, S_1.

P. 56 l. 15, de même au lieu de S_3, S_5, S_4, S_1, lire: S_3^{-1}, S_5, S_4, S_1.

P. 56 l. 17, mettre le signe — devant le second membre de l'égalité (4).

MÉMOIRE SUR LES FONCTIONS FUCHSIENNES.

P. 229 l. 6, après ces mots: le genre de la relation (1), intercaler ce qui suit: est précisément ce que j'ai appelé dans le Mémoire en question, le genre du groupe G. Si donc le groupe G est de genre 0, il en sera de même de la relation (1) ...

P. 229 l. 17, au lieu de:

$$\frac{4\dfrac{d^3x}{dz^3}\dfrac{dx}{dz} - 3\left(\dfrac{d^2x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\dfrac{dx}{dz}\right)}$$

lire:

$$\frac{2\dfrac{d^3x}{dz^3}\dfrac{dx}{dz} - 3\left(\dfrac{d^2x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\dfrac{dx}{dz}\right)^4}.$$

MÉMOIRE SUR LES GROUPES KLEINÉENS.

P. 61 l. 20, au lieu de:

$$S'_1 = S^{-1}S'_1 s$$

lire:

$$S'_1 = S^{-1}S'_1 S.$$

P. 77 l. 22, mettre le signe — devant le second membre de la relation.

P. 85 dernière ligne, au lieu de: c'est le signe +, lire: c'est le signe —.

P. 86 l. 3, mettre le signe — devant le second membre de la relation.

---

[1] Dans le numérotage des lignes, j'ai compté les formules pour des lignes, mais je n'ai pas compté les titres de paragraphes.

SUR LES FONCTIONS DE TROIS VARIABLES

RÉELLES

SATISFAISANT À L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE $\Delta F = 0$

PAR

P. APPELL

À PARIS.

Nous nous occupons dans ce mémoire des fonctions les plus simples de trois variables réelles x, y, z satisfaisant à l'équation différentielle

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

en considérant x, y, z comme les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point de l'espace. Dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, les fonctions qui se présentent tout d'abord sont celles qui sont uniformes et ne possèdent que des points singuliers isolés. Il nous a paru intéressant d'étudier de même les fonctions satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ qui ne cessent d'être finies et continues qu'en certains *points* isolés les uns des autres.

La première partie de ce travail a pour objet l'étude générale de ces fonctions: elle contient une extension du théorème de M. Mittag-Leffler et plusieurs applications du théorème de Green parmi lesquelles se trouvent des développements en série propres à représenter une fonction F uniforme et admettant des dérivées en tous les points d'un volume limité par des portions de surfaces sphériques.

Dans la deuxième partie nous étudions en particulier les fonctions $F(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ et admettant trois groupes

de périodes conjuguées (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') c'est à dire vérifiant les trois équations

$$F(x + a, y + b, z + c) = F(x, y, z)$$

$$F(x + a', y + b', z + c') = F(x, y, z)$$

$$F(x + a'', y + b'', z + c'') = F(x, y, z).$$

Ces fonctions qui reprennent les mêmes valeurs aux points homologues d'un réseau de parallélépipèdes possèdent des propriétés semblables à celles de la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire. Nous avons laissé de côté, pour le moment, l'étude des fonctions $F(x, y, z)$ à un ou deux groupes de périodes conjuguées, étude qui pourrait se faire par les mêmes méthodes.

Quelques-uns des résultats contenus dans ce mémoire ont été indiqués dans une Note présentée à l'Académie des sciences de Paris le 5 Février 1883.

Première partie.

1. Soit n un entier positif; désignons avec MM. Thomson et Tait,[1] par $V_n(x, y, z)$ le polynôme le plus général homogène et du degré n en x, y, z satisfaisant à l'équation

$$\Delta V_n = \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} = 0;$$

dans l'expression de ce polynôme entrent linéairement $2n + 1$ constantes arbitraires: ainsi

$$V_1(x, y, z) = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z$$

---

[1] Voir: *Handbuch der theoretischen Physik von* Thomson *und* Tait; deutsche Uebersetzung von Helmholtz und Wertheim; erster Band, erster Theil, p. 156 et suivantes.

avec trois constantes λ_1, λ_2, λ_3,

$$V_2(x, y, z) = \lambda_1(x^2 - z^2) + \lambda_2(y^2 - z^2) + \lambda_3 yz + \lambda_4 zx + \lambda_5 xy$$

avec cinq constantes; et ainsi de suite. Lorsque différentes fonctions V_n avec des constantes différentes se présenteront dans un calcul, nous les distinguerons les unes des autres par un indice supérieur. Par exemple $V_1^{(1)}(x, y, z)$ sera $\lambda_1^{(1)}x + \lambda_2^{(1)}y + \lambda_3^{(1)}z$ avec d'autres constantes $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_3^{(1)}$; et de même pour V_n en général.

Si l'on substitue aux coordonnées rectilignes rectangulaires x, y, z, les coordonnées polaires dans l'espace à l'aide des formules de transformation:

$$(1) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = r\sin\theta\sin\varphi$$

la fonction $V_n(x, y, z)$ devient

$$V_n(r\cos\theta,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi) = r^n Y_n(\theta, \varphi),$$

Y_n désignant une fonction de LAPLACE.

L'on sait [1] que si une fonction $F(x, y, z)$ satisfait à l'équation $\Delta F = 0$, la fonction

$$\frac{1}{r} F\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right), \qquad \left(r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right),$$

y satisfait également. En appliquant ce théorème à la fonction $V_n(x, y, z)$, nous voyons que la fonction

$$\frac{1}{r} V_n\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right) = \frac{1}{r^{2n+1}} V_n(x, y, z)$$

satisfait à l'équation $\Delta F = 0$; cette fonction qui est homogène du degré $-(n+1)$ en x, y, z est désignée dans l'ouvrage déjà cité de MM. THOMSON et TAIT par

$$V_{-(n+1)}(x, y, z).$$

---

[1] Voir Journal de LIOUVILLE, T. 12, p. 256—264: Extraits de lettres adressées à M. LIOUVILLE par M. W. THOMSON. Voir aussi *Handbuch der Kugelfunktionen* von E. HEINE, zweite Auflage, zweiter Band, p. 251 et suivantes.

L'on a, par exemple,

$$V_{-1} = \frac{\lambda_0}{r}$$

$$V_{-2} = \frac{\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z}{r^3}, \ldots \text{ etc.};$$

on démontre[1] que la fonction $V_{-(n+1)}$ est une combinaison linéaire homogène à coefficients constants des dérivés partielles d'ordre n de $\frac{1}{r}$; ainsi, par exemple,

$$V_{-2} = -\lambda_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \lambda_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Nous avons ainsi une suite de fonctions $V_\nu(x, y, z)$ définies pour toutes les valeurs entières positives ou négatives de l'indice ν. La fonction V_0 est une constante et la fonction V_ν est homogène et du degré ν en x, y, z. Ces fonctions jouent dans la présente théorie le même rôle que la partie réelle de l'expression

$$(a + bi)(x + yi)^\nu$$

dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

2. *Séries entières.*[2] Soit une série de la forme

$$(2) \qquad V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_n(x, y, z) + \ldots + \ldots$$

ordonnée suivant les fonctions V à indices positifs; les constantes arbitraires qui figurent dans $V_n(x, y, z)$ sont supposées avoir des valeurs numériques déterminées. Il est facile de voir qu'une pareille série est convergente en tous les points situés à l'intérieur d'une certaine sphère ayant pour centre l'origine des coordonnées et qui sera appelée sphère de convergence. Si nous remplaçons les coordonnées rectilignes par des

---

(1) Thomson et Tait, *Theoretische Physik*, p. 162.

(2) Les remarques que nous faisons relativement aux séries (2) s'étendent à toute série ordonnée suivant des polynômes homogènes en x, y, z. Il peut se faire, bien entendu, que la série converge en certains points situés en dehors de la sphère de convergence.

coordonnées polaires dans l'espace à l'aide des formules (1) la série (2) prend la forme

(2′) $$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} r^\nu Y_\nu(\theta, \varphi).$$

Désignons par A_ν la plus grande valeur absolue que puisse prendre Y_ν quand θ varie entre 0 et π, φ entre 0 et 2π, et considérons la série à termes positifs

(3) $$\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu r^\nu;$$

cette dernière série (3) est convergente pour toutes les valeurs de r inférieures à un nombre déterminé R; il en est de même a fortiori des séries (2) et (2′) dont les termes sont en valeur absolue au plus égaux à ceux de la série (3). Donc la série (2) est convergente en tous les points situés à l'intérieur d'une sphère de rayon R.

Soit ε un nombre positif plus petit que l'unité et α un nombre positif aussi petit que l'on veut; l'on peut assigner un nombre positif entier m tel que, pour toutes les valeurs de x, y, z vérifiant l'inégalité

$$\frac{r}{R} \leqq \varepsilon,$$

l'on ait [1]

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\nu=r} V_\nu(x, y, z)\right| < \alpha, \text{ si } n \geqq m.$$

Pour le montrer suivons la méthode indiquée par M. WEIERSTRASS; [2] désignons par ε_0 un nombre positif plus petit que 1 mais plus grand que ε; la série (3) est convergente pour $r = R\varepsilon_0$; soit g un nombre au moins égal à la somme de cette série

$$g \geqq \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} R^\nu \varepsilon_0^\nu A_\nu$$

on aura évidemment

$$g \geqq R^\nu \varepsilon_0^\nu A_\nu; \qquad A_\nu \leqq g R^{-\nu} \varepsilon_0^{-\nu}.$$

---

[1] La notation $|a|$ empruntée à M. WEIERSTRASS signifie *valeur absolue de a*.

[2] Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Gesammtsitzung vom 5 August 1880, p. 710.

Maintenant, pour toutes les valeurs de x, y, z telles que $\frac{r}{R} \leqq \varepsilon$, on a

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} V_\nu(x, y, z)\right| \leqq \sum_{\nu=n}^{\nu=\infty} R^\nu \varepsilon^\nu A_\nu \leqq g\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^\nu.$$

Or la dernière somme est égale à $\frac{g}{1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^n$; il suffira donc de déterminer m par la condition

$$\frac{g}{1-\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^m < \alpha.$$

C. Q. F. D.

On conclut facilement de cette proposition que la série (2) définit dans l'intérieur de la sphère de convergence une fonction $F(x, y, z)$ uniforme, continue, admettant des dérivées partielles de tous les ordres et satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$. Il suffit pour le voir d'employer les mêmes raisonnements que pour les séries entières dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. (1)

On verra de même qu'une série de la forme

$$V_0 + V_{-1} + V_{-2} + \ldots + V_{-n}(x, y, z) + \ldots$$

ordonnée par rapport aux fonctions V à indices négatifs est convergente en tous les points situés à l'extérieur d'une sphère ayant pour centre l'origine, et définit en ces points une fonction uniforme, continue, admettant des dérivées partielles et satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$.

Enfin une double série de la forme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} V_\nu(x, y, z)$$

définira une fonction jouissant des mêmes propriétés dans l'espace compris entre deux sphères concentriques ayant pour centre l'origine.

Remarque. Si l'on considère des séries ordonnées par rapport aux

(1) Voir par exemple *Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet, Livre II, Chapitre I.

fonctions $V_\nu(x - x', y - y', z - z')$, les sphères de convergence ont pour centre le point (x', y', z'), comme on le voit en portant l'origine en ce point.

3. Les réciproques de ces propositions sont bien connues. Ainsi:

1°) Une fonction $F(x, y, z)$ uniforme, continue, admettant des dérivées partielles premières et secondes et satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ en tous les points de l'espace situés à l'intérieur d'une sphère de rayon R et de centre (x', y', z') est développable en une série de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} V_\nu(x - x', y - y', z - z'),$$

uniformément convergente en tous les points pour lesquels

$$\frac{r'}{R} = \frac{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}{R} \leqq \varepsilon, \qquad \varepsilon < 1.$$

2°) Une fonction satisfaisant aux mêmes conditions en tous les points situés à l'extérieur d'une sphère de rayon R' et de centre (x', y', z'), et ayant, pour les valeurs infiniment grandes de (x, y, z) une valeur déterminée $F(\infty)$, est développable en une série de la forme

$$F(x, y, z) = F(\infty) + \sum_{\nu=-1}^{\nu=-\infty} V_\nu(x - x', y - y', z - z')$$

uniformément convergente en tous les points pour lesquels

$$\frac{R'}{r'} \leqq \varepsilon', \qquad \varepsilon' < 1.$$

3°) Une fonction satisfaisant aux mêmes conditions dans l'espace compris entre deux sphères de rayons R et R', $R > R'$, et de même centre (x', y', z'), est développable en une série de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} V_\nu(x - x', y - y', z - z')$$

uniformément convergente en tous les points pour lesquels on a, à la fois,

$$\frac{r'}{R} \leqq \varepsilon, \qquad \frac{R'}{r'} \leqq \varepsilon'.$$

La démonstration de ces théorèmes repose sur le théorème de Green. L'on peut calculer les coefficients des fonctions V_ν qui figurent dans ces développements quand on connaît la fonction $F(x, y, z)$ sur les sphères limites. (Voir, par exemple, Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen*, zweite Auflage, zweiter Band, p. 54 n° 3.)

Ces théorèmes seront d'ailleurs généralisés plus loin (§ 7 et suivants). Il est clair que l'on peut supposer, dans le 3ème cas, le rayon R' de la sphère intérieure infiniment petit, ou le rayon R de la sphère extérieure infiniment grand.

4. Toutes les fonctions $F(x, y, z)$ dont il est question dans la suite satisfont à l'équation $\Delta F = 0$ en tous les points où elles sont définies. Étant donné un point P de coordonnées (a, b, c) nous appellerons domaine δ du point P l'intérieur d'une sphère de centre P et de rayon δ; les points appartenant au domaine δ du point P sont les points dont les coordonnées vérifient l'inégalité

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \leqq \delta.$$

Une fonction $F(x, y, z)$ est dite régulière au point $P(a, b, c)$ si l'on peut assigner un nombre positif δ tel que, dans le domaine δ du point P, la fonction F soit développable en une série convergente de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} V_\nu(x-a, y-b, z-c).$$

Une fonction $F(x, y, z)$ est dite régulière au point ∞ si l'on peut assigner un nombre positif R tel que la fonction soit développable en une série de la forme

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=-\infty} V_\nu(x, y, z) = V_0 + V_{-1} + \ldots + V_{-n} + \ldots$$

en tous les points situés à l'extérieur d'une sphère de centre o et de rayon R.

Théorème I. Une fonction uniforme régulière en tous les points de l'espace (y compris le point ∞) *est une constante.* (Théorème démontré par M. Picard, Comptes-rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris T. XC, p. 601.)

5. *Points singuliers d'une fonction uniforme.* Considérons maintenant une fonction $F(x, y, z)$ uniforme dans tout l'espace et régulière en tous les points de l'espace excepté en certains points qui seront appelés points singuliers. Soit P un de ces points ayant pour coordonnées (a, b, c), nous dirons que ce point est un pôle de degré n de la fonction F s'il existe une fonction φ de la forme

$$(4)\quad \varphi(x-a, y-b, z-c) = V_{-1}(x-a, y-b, z-c) + V_{-2}(x-a, y-b, z-c) + \ldots + V_{-n}(x-a, y-b, z-c)$$

telle que la différence

$$F(x, y, z) - \varphi(x-a, y-b, z-c)$$

soit régulière au point P. Cette fonction φ sera appelée partie principale de la fonction F relative au pôle P; le premier terme de φ est de la forme

$$V_{-1}(x-a, y-b, z-c) = \frac{\lambda}{+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}};$$

le coefficient λ sera appelé le *résidu* relatif au pôle P.

Si au contraire il n'existe pas de fonction φ de la forme (4) telle que $F - \varphi$ soit régulière au point P, ce point P sera un point singulier essentiel. Deux cas peuvent alors se présenter.

1°) Ou bien un domaine quelconque δ du point P renferme d'autres points singuliers que P quelque petit que soit δ;

2°) ou bien l'on peut assigner un nombre δ tel que, dans le domaine δ du point P, il n'y ait plus d'autre point singulier que P. Nous dirons alors que P est un point singulier essentiel *isolé*. Décrivons de P comme centre avec un rayon $\delta' < \delta$ une sphère; la fonction F remplira les conditions du théorème du § 3 dans l'espace compris entre les deux sphères concentriques de rayons δ et δ' et l'on aura, dans cet espace,

$$(5)\quad F = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} V_\nu(x-a, y-b, z-c) + \sum_{\nu=-1}^{\nu=-\infty} V_\nu(x-a, y-b, z-c);$$

comme l'on peut supposer δ' infiniment petit, le développement précédent

est valable dans tout le domaine δ du point P excepté au point P lui-même. Posons

$$(6) \qquad G(x, y, z \mid a, b, c) = \sum_{\nu=-1}^{\nu=-\infty} V_\nu(x-a, y-b, z-c),$$

la série du second membre étant la seconde série du développement (5). Comme cette seconde série est convergente dans le domaine δ du point P, elle l'est a fortiori en dehors de ce domaine; par conséquent l'équation (6) définit une fonction G régulière en tous les points de l'espace excepté au point P; et, d'après l'équation (5) la différence $F - G$ est régulière au point P. Ainsi, si le point P est un point singulier essentiel isolé, il existe une fonction G de la forme (6) telle que la différence $F - G$ soit régulière au point P. Cette fonction G sera encore appelée la partie principale relative au point singulier essentiel isolé P, et le coefficient de

$$\frac{1}{+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$

dans le premier terme V_{-1} de G sera le résidu relatif à ce point.

Dans ce qui précède nous avons supposé le point P à distance finie. Supposons maintenant que la fonction F ne soit pas régulière à l'infini; alors le point ∞ sera un point singulier. Nous dirons que le point ∞ est un pôle de degré n de la fonction F, s'il existe une fonction Ψ de la forme

$$(7) \qquad \Psi(x, y, z) = V_1(x, y, z) + V_2(x, y, z) + \ldots + V_n(x, y, z)$$

telle que la différence $F - \Psi$ soit régulière au point ∞. S'il n'existe pas de fonction Ψ possédant cette propriété, le point ∞ sera un point singulier essentiel et deux cas pourront se présenter.

1°) Si l'on décrit une sphère de l'origine comme centre avec un rayon R, il y a toujours des points singuliers hors de cette sphère quelque grand que soit R.

2°) L'on peut assigner un rayon R tel qu'en dehors de la sphère de rayon R il n'y ait plus d'autre point singulier que le point ∞; ce point sera alors un point essentiel isolé. Décrivons une autre sphère ayant également pour centre l'origine et ayant un rayon $R' > R$ aussi grand

qu'on le veut. La fonction F satisfait aux conditions du théorème du § 3 dans l'espace compris entre les deux sphères R et R' et l'on aura dans cet espace

$$F = \sum_{\nu=-1}^{\nu=-\infty} V_\nu(x, y, z) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V_\nu(x, y, z); \tag{8}$$

la seconde série qui procède suivant les V_ν à indices positifs est convergente dans l'intérieur de la sphère de rayon R' quelque grand que soit R'; si donc on pose

$$G(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V_\nu(x, y, z) \tag{9}$$

cette équation définit une fonction uniforme dans tout l'espace ayant un seul point singulier à savoir le point ∞; et, d'après la relation (8), la différence $F - G$ est régulière à l'infini. Cette fonction G sera appelée la partie principale de F relativement au point singulier essentiel isolé ∞.

Remarque. L'on pourrait ramener l'étude d'une fonction dans le voisinage du point ∞ à l'étude d'une autre fonction dans le voisinage de l'origine par la méthode des rayons vecteurs réciproques. En effet considérons une fonction $F(x, y, z)$ et posons

$$x = \frac{x'}{r'^2}, \qquad y = \frac{y'}{r'^2}, \qquad z = \frac{z'}{r'^2}$$

$$r = + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad r' = + \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$rr' = 1;$$

la fonction

$$F_1(x', y', z') = \frac{1}{r'} F\left(\frac{x'}{r'^2}, \frac{y'}{r'^2}, \frac{z'}{r'^2}\right)$$

satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z'^2} = 0,$$

et quand le point (x, y, z) est à l'infini le point (x', y', z') est à l'origine. Nous n'avons pas suivi cette méthode parce qu'il peut arriver que la

fonction $F(x, y, z)$ soit régulière à l'infini tandis que $F_1(x', y', z')$ admette pour pôle du premier degré l'origine. Ainsi la fonction

$$F(x, y, z) = \frac{A}{r} + B$$

est régulière à l'infini et

$$F_1(x', y', z') = A + \frac{B}{r'}$$

a pour pôle l'origine.

Théorème II. Une fonction qui n'a d'autres points singuliers que des pôles est égale à une somme de fonctions φ telles que la fonction (4) *augmentée d'une fonction Ψ* (7) *et d'une constante.* (Une telle fonction n'ayant que des pôles est analogue à la partie réelle d'une fonction rationnelle d'une variable imaginaire.)

Remarquons d'abord que, si une fonction $F(x, y, z)$ n'a que des pôles, le nombre de ces pôles est nécessairement limité. En effet, la fonction est régulière au point ∞ ou admet ce point pour pôle: dans les deux cas on pourra décrire de l'origine comme centre une sphère S de rayon assez grand pour qu'il n'y ait plus à distance finie aucun pôle à *l'extérieur* de cette sphère. Si donc il y avait une infinité de pôles, il y en aurait une infinité dans l'intérieur de cette sphère S; mais alors il faudrait qu'il existât dans l'intérieur de S au moins un point P tel que, dans tout domaine δ de ce point, il y eût une infinité de pôles quelque petit que soit δ, et ce point P serait un point singulier essentiel; ce qui est contre l'hypothèse.

Soient alors $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ les pôles en nombre fini ν ayant pour coordonnées respectives $(a_1, b_1, c_1), \ldots, (a_\nu, b_\nu, c_\nu)$, et

$$\varphi_k = V_{-1}^{(k)}(x - a_k, y - b_k, z - c_k) + \ldots + V_{-n_\nu}^{(k)}(x - a_k, y - b_k, z - c_k)$$

la partie principale de F relative au pôle P_k. (L'indice supérieur (k) dont sont affectées les fonctions V signifie que les constantes arbitraires qui figurent dans ces fonctions ont des valeurs particulières relatives au pôle P_k.) Soit de même

$$\Psi = V_1(x, y, z) + V_2(x, y, z) + \ldots + V_n(x, y, z)$$

la partie principale de F relative au point ∞, partie principale qui peut être nulle si la fonction F est régulière à l'infini. Alors, d'après la définition même des pôles, la différence

$$F - \varphi_1 - \varphi_2 - \ldots - \varphi_\nu - \Psi$$

sera une fonction uniforme régulière en tous les points de l'espace c'est à dire une constante C en vertu du théorème I. On a donc

$$F = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_\nu + \Psi + C;$$

ce qui démontre le théorème II.

Théorème III. La fonction F la plus générale possédant n points singuliers est la somme de n fonctions ne possédant chacune qu'un seul point singulier.

Supposons, pour plus de généralité, que les n points singuliers $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de coordonnées $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \ldots, (a_n, b_n, c_n)$ soient des points essentiels, ce seront *des points singuliers essentiels isolés.* Désignons par

$$G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k) = \sum_{\nu=-1}^{\nu=-\infty} V_\nu^{(k)}(x - a_k, y - b_k, z - c_k)$$

la partie principale de la fonction F relative au point P_k. Comme nous l'avons déjà dit, cette fonction G_k est régulière en tous les points de l'espace excepté au seul point P_k. Si nous prenons la différence

$$F - \sum_{k=1}^{k=n} G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k),$$

cette différence sera une fonction partout régulière c'est à dire une constante: donc

$$F = C^{te} + \sum_{k=1}^{k=n} G_k(x, y, z \mid a_k, b_k, c_k);$$

ce qui démontre le théorème.

Si l'un des points singuliers, par exemple (a_n, b_n, c_n), est à l'infini il faut remplacer la fonction correspondante

$$G_n(x, y, z \mid a_n, b_n, c_n),$$

par une fonction entière $G(x, y, z)$ de la forme (9) régulière en tous les points à distance finie.

Théorème IV. (Extension du théorème de M. Mittag-Leffler.)

Soient

$$P_\nu(a_\nu, b_\nu, c_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

des points en nombre infini situés à distance finie tous différents les uns des autres et tels qu'en posant

$$r_\nu = + \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2}$$

l'on ait

$$\lim_{\nu=\infty} r_\nu = \infty.$$

Soient données d'autre part une suite indéfinie de fonctions

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$$

satisfaisant à l'équation $\Delta\varphi = 0$, *la fonction* φ_ν *étant uniforme et régulière en tous les points de l'espace excepté au point* $P_\nu(a_\nu, b_\nu, c_\nu)$ *qui est un pôle de degré* n_ν *de cette fonction.*[1]

L'on peut alors former une fonction $F(x, y, z)$ *ayant un point singulier essentiel à l'infini et admettant pour pôles les points* P_ν *de telle façon que la différence*

$$F - \varphi_\nu$$

soit régulière au point P_ν.

Nous démontrerons ce théorème en employant la méthode donnée par M. Weierstrass pour le théorème de M. Mittag-Leffler.

Prenons une quantité positive $\varepsilon < 1$ et une suite indéfinie de quantités positives

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$$

---

[1] Ces fonctions φ_ν sont donc de la forme (4).

ayant une somme finie; faisons de plus, comme précédemment,

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Si parmi les points P_ν se trouve l'origine; si par exemple pour $\nu = \nu'$

$$a_{\nu'} = b_{\nu'} = c_{\nu'} = 0,$$

nous poserons

$$F_{\nu'}(x, y, z) = \varphi_{\nu'}.$$

Supposons maintenant $r_\nu > 0$; alors la fonction uniforme φ_ν est régulière en tous les points de l'espace satisfaisant à la condition

$$r < r_\nu;$$

elle est donc en tous ces points développable en une série convergente de la forme

$$\varphi_\nu = \sum_{m=0}^{m=+\infty} V_m^{(\nu)}(x, y, z) \tag{10}$$

où l'indice (ν) dont sont affectées les fonctions V_m sert à indiquer que ce sont les fonctions provenant du développement de φ_ν.

Puisque cette série (10) est convergente en tous les points pour lesquels $r < r_\nu$, on peut d'après les théorèmes rappelés dans le § 3, assigner un entier positif m_ν tel que, pour toutes les valeurs de x, y, z satisfaisant à l'inégalité

$$\frac{r}{r_\nu} \leqq \varepsilon, \tag{11}$$

la valeur absolue de la somme

$$\sum_{m=m_\nu}^{m=+\infty} V_m^{(\nu)}(x, y, z)$$

soit moindre que ε_ν. Posons alors

$$F_\nu(x, y, z) = \varphi_\nu - \sum_{m=0}^{m=m_\nu-1} V_m^{(\nu)}(x, y, z),$$

on aura

$$|F_\nu(x, y, z)| < \varepsilon_\nu$$

sous la condition (11). On en conclut que la série

$$(12) \qquad F_\nu(x, y, z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} F_\nu(x, y, z)$$

est convergente en tous les points de l'espace excepté aux points P_ν et définit une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

En effet, soit $P'(x', y', z')$ un point ne coïncidant avec aucun des points P_ν et δ un nombre positif assez petit pour que dans le domaine δ du point P' il n'y ait aucun point P_ν; l'on pourra alors, en désignant par α un nombre donné à l'avance aussi petit que l'on veut, déterminer un nombre entier μ tel que si

$$\nu \geq \mu$$

on ait

$$\frac{r}{r_\nu} \leq \varepsilon, \qquad |F_\nu(x, y, z)| < \varepsilon_\nu$$

pour tous les points du domaine δ de P' et de plus

$$\sum_{\nu=\mu}^{\nu=\infty} \varepsilon_\nu < \alpha, \qquad \left| \sum_{\nu=\mu}^{\nu=\infty} F_\nu(x, y, z) \right| < \alpha.$$

La série (12) est donc uniformément convergente en tous les points du domaine δ de P'; on en conclut immédiatement qu'elle définit une fonction $F(x, y, z)$ régulière au point P'.

Soit maintenant P_λ un des points P_ν et δ un nombre tel que, dans le domaine δ du point P_λ, il n'y ait pas d'autre point P_ν; alors d'après ce qui précède on a, dans ce domaine δ,

$$F(x, y, z) = F_\lambda(x, y, z) + F'(x, y, z)$$

où $F'(x, y, z)$ désigne une fonction régulière au point P_λ; et d'après la forme de $F_\lambda(x, y, z)$ on voit que la différence

$$F(x, y, z) - \varphi_\lambda$$

est régulière au point P_λ.

La fonction F définie par la série (12) satisfait donc bien aux conditions de l'énoncé. La fonction la plus générale satisfaisant à ces conditions est

$$F(x, y, z) + G(x, y, z),$$

G étant une fonction entière de la forme (9).

Théorème de Green. Soient U et V deux fonctions quelconques de x, y, z finies continues et admettant des dérivées premières et secondes en tous les points situés dans l'intérieur d'une surface fermée S et sur cette surface elle-même; on a l'équation

$$(13) \qquad \iiint (U\Delta V - V\Delta U)\, dx\, dy\, dz = \iint_S \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) d\sigma$$

où la première intégrale est étendue à tout le volume limité par la surface S, la deuxième à toute la surface S; le symbole $d\sigma$ désigne un élément de la surface S, $\frac{\partial V}{\partial n}$ la dérivée de V prise suivant la portion de normale extérieure à S, et $\frac{\partial U}{\partial n}$ la dérivée de U suivant cette même normale. En appelant α, β, γ les cosinus directeurs de la portion de normale à la surface S dirigée vers l'extérieur du volume limité par S, on a

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \alpha\frac{\partial V}{\partial x} + \beta\frac{\partial V}{\partial y} + \gamma\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \beta\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Théorème V. Si une fonction $F(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ est uniforme dans l'intérieur d'une surface S et régulière en tous les points situés dans l'intérieur de cette surface et sur la surface, l'intégrale double

$$\iint_S \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma$$

étendue à toute la surface S est nulle.

Pour le voir, il suffit de faire dans l'équation générale (13)

$$V = 1, \qquad U = F$$

et par suite

$$\Delta V = 0, \qquad \Delta U = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial n} = 0;$$

l'on obtient immédiatement l'équation

$$\iint_S \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Théorème VI. Si une fonction $F(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ admet un point P pour pôle ou pour point singulier essentiel isolé, l'intégrale double

$$\iint \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma \tag{14}$$

étendue à la surface d'une sphère ayant pour centre P et ne contenant pas d'autre point singulier que P est égale au résidu de F rélatif au point P multiplié par -4π.

Soient (a, b, c) les coordonnées du point P et S une sphère de centre P et de rayon ρ dans l'intérieur et sur la surface de laquelle il n'y ait pas d'autres points singuliers que P; on a pour tous les points du domaine ρ du point P

$$F(x, y, z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} V_\nu(x-a, y-b, z-c). \tag{15}$$

Sur la sphère S

$$x - a = \rho \cos\theta$$

$$y - b = \rho \sin\theta \cos\varphi$$

$$z - c = \rho \sin\theta \sin\varphi$$

$$0 \leqq \theta \leqq \pi, \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

Portant ces valeurs dans le développement (15), ce développement prend la forme

$$F = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \rho^{\nu} Y_{\nu}(\theta, \varphi) + \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} \rho^{-\nu} Y_{\nu-1}^{(1)}(\theta, \varphi);$$

par suite puisque la normale à S est le rayon

$$(15') \qquad \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial \rho} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \nu\rho^{\nu-1} Y_{\nu}(\theta, \varphi) - \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \nu\rho^{-(\nu+1)} Y_{\nu-1}^{(1)}(\theta, \varphi).$$

Portons ce développement de $\frac{\partial F}{\partial n}$ dans l'intégrale double (14) en remplaçant $d\sigma$ par sa valeur

$$\rho^2 \sin\theta d\theta d\varphi;$$

et rappelons-nous que l'on a

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} Y_{\nu}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta = 0$$

tant que ν est différent de zéro, Y_{ν} désignant une fonction quelconque de Laplace. Nous voyons alors que dans l'intégrale (14) tous les termes du développement (15′) qui contiennent des fonctions Y_{ν} avec un indice différent de zéro disparaissent, et il reste

$$\iint \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = -\iint Y_0^{(1)}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Mais $Y_0^{(1)}(\theta, \varphi)$ est une constante qui n'est autre chose que le *résidu* de F relatif au point P; on a donc

$$\iint \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = -Y_0^{(1)} \iint \sin\theta d\theta d\varphi = -Y_0^{(1)} \cdot 4\pi;$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème VII. Soit $F(x, y, z)$ une fonction vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ uniforme dans l'intérieur d'une surface S et régulière en tous les

points situés dans l'intérieur de S et sur S excepté en p points intérieurs $P_1, P_2, \ldots, P_p$; l'intégrale double

$$\iint\limits_S \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma$$

étendue à la surface S est égale à la somme des résidus relatifs aux points singuliers $P_1, P_2, \ldots, P_p$ multipliée par -4π.

Entourons chaque point P_k d'une sphère S_k située à l'intérieur de S ayant pour centre le point P_k et un rayon assez petit pour qu'elle ne rencontre aucune des autres sphères S_i ayant pour centres les autres points P_i. Si nous considérons le volume V situé à l'intérieur de S et à l'extérieur des sphères $S_1, S_2, \ldots, S_p$, la fonction F est régulière en tous les points de ce volume et, d'après le théorème V, l'intégrale double

$$\iint \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma$$

étendue à la surface limitant ce volume c'est à dire aux surfaces

$$S,\ S_1,\ S_2, \ldots, S_p \tag{16}$$

est égale à zéro. Or cette intégrale double est la somme de $(p+1)$ intégrales étendues respectivement aux surfaces (16); on a donc

$$\iint\limits_S \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma + \sum_{k=1}^{k=p} \iint\limits_{S_k} \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma = 0 \tag{17}$$

les indices dont sont affectées les intégrales indiquant les surfaces auxquelles elles sont étendues. Mais d'après le théorème précédent VI, on a

$$\iint\limits_{S_k} \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma = 4\pi R_k, \tag{18}$$

R_k étant le résidu relatif au point P_k; cette intégrale (18) est ici égale à $+4\pi R_k$, car, dans cette intégrale, la dérivée $\frac{\partial F}{\partial n}$ est prise vers l'ex-

térieur du volume V, c'est à dire vers *l'intérieur* de la sphère S_k. L'on a donc enfin, d'après l'équation (17),

$$\iint_S \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = - 4\pi(R_1 + R_2 + \ldots + R_p);$$

ce qui démontre la proposition.

6. *Application.* Soit une fonction $F(x, y, z)$ uniforme dans tout l'espace ayant à distance finie p points singuliers $P_1, P_2, \ldots, P_p$ de résidus respectifs $R_1, R_2, \ldots, R_p$; pour des valeurs suffisamment grandes de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

cette fonction est développable en une double série de la forme

$$F = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} V_\nu(x, y, z) \tag{19}$$

où la fonction $V_{-1}(x, y, z)$ est égale à $\frac{R}{r}$, R étant une constante. L'on a alors la relation

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_p. \tag{20}$$

En effet décrivons de l'origine o comme centre une sphère S avec un rayon ρ assez grand pour que tous les points $P_1, P_2, \ldots, P_p$ soient à l'intérieur de cette sphère. D'après le théorème précédent, on a

$$\iint_S \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma = - 4\pi(R_1 + R_2 + \ldots + R_p). \tag{21}$$

Mais si l'on décrit une sphère S' de centre o passant par celui des points P_k qui est le plus éloigné de o, la fonction F sera, à l'extérieur de cette sphère S', représentée par la série (19); ce développement (19) conviendra donc en tous les points de la sphère S qui est extérieure à S' par hypothèse. Or, sur la sphère S, on a

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \sin \theta \cos \varphi, \qquad z = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$d\sigma = \rho^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$(19') \qquad F = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \rho^{\nu} Y_{\nu}(\theta, \varphi) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \rho^{-\nu} Y_{\nu-1}^{(1)}(\theta, \varphi);$$

dans ce développement (19′) la fonction $Y_0^{(1)}(\theta, \varphi)$ est égale précisément à R. On a de plus sur cette sphère S

$$(19'') \qquad \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial \rho} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \rho^{\nu-1} Y_{\nu}(\theta, \varphi) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \rho^{-(\nu+1)} Y_{\nu-1}^{(1)}(\theta, \varphi).$$

Portant ce développement dans l'intégrale (21) nous verrons comme précédemment (Théorème VI) que cette intégrale se réduit à

$$-4\pi Y_0^{(1)}(\theta, \varphi) = -4\pi R.$$

L'on en conclut la relation (20) qu'il s'agissait de démontrer. Cette relation est entièrement semblable à une relation bien connue qui se présente dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire et que j'ai démontrée précédemment (Acta Mathematica T. 1, p. 109, Théorème I).

Théorème VIII. Soit $F(x, y, z)$ une fonction vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ uniforme dans l'intérieur d'une surface fermée S et régulière en tous les points situés dans l'intérieur de S et sur S; l'on a la relation

$$(22) \qquad F(a, b, c) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(T \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial T}{\partial n} \right) d\sigma$$

où (a, b, c) est un point fixe quelconque situé à l'intérieur de S et où

$$(22') \qquad T = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

On trouvera, par exemple, la démonstration de cette formule dans le *Handbuch der Kugelfunctionen* de Heine, zweite Auflage, zweiter Band,

p. 93; les dérivées $\frac{\partial T}{\partial n_1}$ qui figurent dans la formule de Heine sont prises suivant la normale *intérieure;* on a donc ici

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\partial T}{\partial n_1}, \qquad \frac{\partial F}{\partial n} = -\frac{\partial F}{\partial n_1}.$$

Voici d'abord une extension intéressante du théorème précédent.

Théorème IX. Si une fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ est uniforme en dehors d'une surface fermée S et est régulière en tous les points situés sur cette surface et en dehors de cette surface y compris le point ∞, l'on a

$$(23) \qquad F(a, b, c) - F(\infty) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right) d\sigma.$$

Dans cette formule $F(\infty)$ désigne la valeur que prend la fonction F à l'infini, a, b, c sont les coordonnées d'un point quelconque extérieur à S, T est défini par la relation (22') et les dérivées $\frac{\partial F}{\partial n_1}$, $\frac{\partial T}{\partial n_1}$ sont prises vers *l'intérieur* de S.

Pour démontrer cette formule, remarquons que, la fonction F étant régulière à l'infini, on peut assigner un nombre ρ tel qu'en tous les points de l'espace extérieurs à une sphère de centre o et de rayon ρ, la fonction F soit développable en une série convergente de la forme

$$(24) \qquad F(x, y, z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} V_{-\nu}(x, y, z), \qquad V_0 = F(\infty).$$

Considérons alors une sphère S' de centre o et de rayon $\rho' > \rho$ contenant dans son intérieur la surface S et le point (a, b, c); la série précédente (24) sera, d'après ce que nous avons vu, uniformément convergente en tous les points situés sur cette sphère S'. Appelons V le volume situé à l'intérieur de cette sphère S' et à l'extérieur de la surface donnée S et appliquons le théorème VIII, éq. (22) à ce volume. Nous obtenons l'équation

$$(25) \quad F(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right) d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint_{S'} \left(T\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial T}{\partial n}\right) d\sigma$$

où la première intégrale est étendue à la surface S, la deuxième à la surface de la sphère S', surfaces qui constituent la limite du volume V; l'indice I dont est affecté n dans la première intégrale provient de ce que l'extérieur de V est l'intérieur de S. Nous allons évaluer maintenant la seconde de ces intégrales

$$(26) \qquad \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S'}\left(T\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial T}{\partial n}\right)d\sigma$$

et montrer qu'elle est égale à $F(\infty)$.

Sur la surface de la sphère S' on a

$$x = \rho' \cos\theta, \qquad y = \rho' \sin\theta\cos\varphi, \qquad z = \rho'\sin\theta\sin\varphi,$$

$$d\sigma = \rho'^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

et d'après (24)

$$(24') \qquad F(x,\ y,\ z) = F(\infty) + \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{Y_\nu(\theta,\ \varphi)}{\rho'^{\nu+1}}$$

$$(24'') \qquad \frac{\partial F}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial \rho'} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}(\nu + 1)\frac{Y_\nu(\theta,\ \varphi)}{\rho'^{\nu+2}}.$$

La fonction T devient en faisant

$$a^2 + b^2 + c^2 = r'^2$$

$$\cos\gamma = \frac{ax + by + cz}{r'\rho'} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta\cos\varphi + c\sin\theta\sin\varphi}{r'}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 - 2\rho' r'\cos\gamma + r'^2}} = \frac{1}{\rho'}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r'}{\rho'}\cos\gamma + \frac{r'^2}{\rho'^2}}};$$

en développant le coefficient de $\frac{1}{\rho'}$ suivant les puissances de $\frac{r'}{\rho'}$ qui est moindre que l'unité, l'on obtient, d'après une formule de Legendre

$$T = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{r'^{\nu}}{\rho'^{\nu+1}}P_\nu(\cos\gamma)$$

où P_ν est un polynôme de LEGENDRE. Dans ce développement, le coefficient de $\frac{1}{\rho'^{\nu+1}}$

$$r'^\nu P_\nu(\cos\gamma)$$

considéré comme fonction de θ et φ est, comme l'on sait, une fonction de LAPLACE que nous désignerons par $Y_\nu^{(1)}(\theta, \varphi)$ en nous rappelant que

$$Y_0^{(1)}(\theta, \varphi) = P_0(\cos\gamma) = 1.$$

Alors T s'écrira

$$(27) \qquad T = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{Y_\nu^{(1)}(\theta, \varphi)}{\rho'^{\nu+1}}$$

d'où

$$(27') \qquad \frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial \rho'} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (\nu + 1) \frac{Y_\nu^{(1)}(\theta, \varphi)}{\rho'^{\nu+2}}.$$

Portons ces développements (24'), (24''), (27) et (27') dans l'intégrale (26). Nous voyons d'abord que les termes de la forme

$$Y_\nu(\theta, \varphi)\, Y_\nu^{(1)}(\theta, \varphi)$$

disparaissent sous le signe $\int\int$; quant aux termes en

$$Y_\nu(\theta, \varphi)\, Y_{\nu'}^{(1)}(\theta, \varphi), \qquad \nu \gtrless \nu'$$

leurs coefficients ne sont pas nuls, mais leurs intégrales sont nulles d'après la formule connue

$$\int\int Y_\nu(\theta, \varphi)\, Y_{\nu'}^{(1)}(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0. \qquad \nu \gtrless \nu'$$

Le seul terme qui subsiste après toutes ces réductions dans l'intégrale (26) est

$$\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{F(\infty)}{\rho'^2}\, Y_0^{(1)}(\theta, \varphi)\, d\sigma,$$

c'est à dire $F(\infty)$, puisque $Y_0^{(1)}(\theta, \varphi)$ est égal à l'unité. La formule (23) est donc démontrée.

7. Nous allons maintenant généraliser les théorèmes du § 3 en nous appuyant sur les formules précédentes. Tout d'abord nous considérerons un cas simple qui sera d'une extension facile.

Imaginons deux sphères S_1 et S_2 qui ne sont pas entièrement intérieures l'une à l'autre et qui ont pour centres respectifs les points

$$P_1(x_1, y_1, z_1), \qquad P_2(x_2, y_2, z_2);$$

soit d'autre part $F(x, y, z)$ une fonction uniforme dans tout l'espace E extérieur à la fois aux deux sphères et régulière en tous les points de cet espace y compris le point ∞; cette fonction est développable en une double série de la forme

$$(28) \qquad F(x, y, z) = F(\infty) + \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} V_{-\nu}^{(1)}(x - x_1, y - y_1, z - z_1) + \sum_{\nu=1}^{\nu=+\infty} V_{-\nu}^{(2)}(x - x_2, y - y_2, z - z_2)$$

convergente en tous les points de l'espace E.

Considérons la surface fermée S constituée par les portions des deux sphères S_1 et S_2 qui limitent l'espace E et appliquons à cette surface S le théorème précédent, éq. (23). En désignant par (a, b, c) un point quelconque de l'espace E, nous avons, d'après (23),

$$F(a, b, c) = F(\infty) + \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right) d\sigma.$$

Partageons l'intégrale double du second membre en deux parties se rapportant respectivement aux portions des deux sphères S_1 et S_2 qui limitent l'espace E; nous aurons

$$(28') \qquad F(a, b, c) = F(\infty) + \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} \left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right) d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint_{S_2} \left(T\frac{\partial F}{\partial n_2} - F\frac{\partial T}{\partial n_2}\right) d\sigma.$$

La première de ces intégrales

$$(29) \qquad \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right)d\sigma$$

est étendue à la portion de la sphère S_1 qui limite l'espace E; si les deux sphères S_1 et S_2 ne se rencontrent pas, cette intégrale est étendue à toute la surface de S_1; mais si elles se rencontrent l'intégrale n'est étendue qu'à la partie de la surface de S_1 qui est *extérieure* à S_2. Dans l'intégrale (29) le point (x, y, z) est sur la surface de la sphère S_1; en appelant ρ_1 le rayon de cette sphère, l'on aura donc

$$\rho_1 = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2};$$

désignons de même par r_1 la distance du point (a, b, c) au centre (x_1, y_1, z_1) de la sphère S_1

$$r_1 = \sqrt{(a-x_1)^2 + (b-y_1)^2 + (c-z_1)^2},$$

et appelons γ_1 l'angle que font entre elles les droites joignant les deux points (a, b, c), (x, y, z) au centre (x_1, y_1, z_1):

$$\cos\gamma_1 = \frac{(x-x_1)(a-x_1) + (y-y_1)(b-y_1) + (z-z_1)(c-z_1)}{r_1\rho_1}.$$

Nous aurons

$$T = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 - 2r_1\rho_1\cos\gamma_1 + \rho_1^2}},$$

et comme sur la surface S_1

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 < 1$$

on peut développer T en une série uniformément convergente

$$T = \sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty}\frac{\rho_1^\nu}{r_1^{\nu+1}}P_\nu(\cos\gamma_1)$$

où P_ν est un polynôme de Legendre. Quand le point (x, y, z) se déplace sur la normale à la sphère S_1, $\cos\gamma_1$ et r_1 restent constants; donc

$$\frac{\partial T}{\partial n_1} = -\frac{\partial T}{\partial \rho_1} = -\sum_{\nu=0}^{\nu=+\infty} \frac{\nu\rho_1^{\nu-1}}{r_1^{\nu+1}} P_\nu(\cos\gamma_1);$$

l'on a, par suite de ces développements de T et $\frac{\partial T}{\partial n_1}$,

$$(30) \qquad T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \rho_1^{\nu-1}\left[\rho_1\frac{\partial F}{\partial n_1} + \nu F\right]\frac{P_\nu(\cos\gamma_1)}{r_1^{\nu+1}}.$$

Dans le terme général de cette dernière série (30) le facteur

$$\frac{P_\nu(\cos\gamma_1)}{r_1^{\nu+1}}$$

dépend seul de (a, b, c); considéré comme fonction de a, b, c ce facteur est une fonction

$$(31) \qquad V_{-(\nu+1)}(a - x_1,\ b - y_1,\ c - z_1)$$

ayant pour coefficients des fonctions de x, y, z. En portant le développement (30) dans l'intégrale (29), l'on a

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right)d\sigma = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{1}{4\pi}\iint_{S_1}\rho_1^{\nu-1}\left[\rho_1\frac{\partial F}{\partial n_1} + \nu F\right]\frac{P_\nu(\cos\gamma_1)}{r_1^{\nu+1}}\,d\sigma.$$

Le terme général du second membre considéré comme fonction de a, b, c est encore une fonction

$$V_{-(\nu+1)}^{(1)}(a - x_1,\ b - y_1,\ c - z_1)$$

déduite de la fonction (31) en multipliant cette fonction par le facteur

$$\frac{1}{4\pi}\rho_1^{\nu-1}\left[\rho_1\frac{\partial F}{\partial n_1} + \nu F\right]d\sigma$$

qui dépend de x, y, z et non de a, b, c, et effectuant l'intégration, ce

qui n'a d'autre effet que de modifier les coefficients de la fonction (31). L'on a donc enfin

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1}\left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right)d\sigma = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V^{(1)}_{-(\nu+1)}(a - x_1,\ b - y_1,\ c - z_1);$$

on trouvera de même

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_2}\left(T\frac{\partial F}{\partial n_1} - F\frac{\partial T}{\partial n_1}\right)d\sigma = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V^{(2)}_{-(\nu+1)}(a - x_2,\ b - y_2,\ c - z_2);$$

en portant ces développements dans la formule (28′) nous obtiendrons la formule (28) à démontrer, sauf le changement de x, y, z en a, b, c.

L'on peut faire sur les développements en série (28) les mêmes remarques que sur les développements en série d'une fonction d'une variable imaginaire holomorphe à l'extérieur de deux cercles: [1]

1° Si les deux sphères S_1 et S_2 n'ont aucun point commun, le développement (28) n'est possible que d'une manière; les fonctions

$$V^{(1)}_{-\nu}(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1), \qquad V^{(2)}_{-\nu}(x - x_2,\ y - y_2,\ z - z_2)$$

sont entièrement déterminées.

2° Si les deux sphères S_1 et S_2 se coupent ou seulement se touchent, le développement (28) est possible *d'une infinité de manières;* en d'autres termes on peut former une infinité de séries de la forme (28) ayant pour *somme zéro.* Soit en effet

$$\varphi(x,\ y,\ z)$$

une fonction satisfaisant à l'équation $\Delta\varphi = 0$ uniforme dans l'espace situé en dehors du solide commun aux deux sphères et régulière en tous les points de cet espace. Cette fonction φ sera à l'extérieur de la sphère S_1 développable en une série de la forme

$$(32) \qquad \varphi(x,\ y,\ z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V^{(3)}_{-\nu}(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1);$$

[1] Voir une note *Sur certains développements en série de puissances* que j'ai publiée dans le Bulletin de la Société Mathématique de France, T. XI, 1883.

à l'extérieur de S_2, cette même fonction sera développable en une série de la forme

$$(32') \qquad \varphi(x,\ y,\ z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(4)}(x - x_2,\ y - y_2,\ z - z_2);$$

et l'on a de plus $V_0^{(3)} = V_0^{(4)} = \varphi(\infty)$. La différence des deux séries (32) et 32')

$$S(x,\ y,\ z) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(3)}(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$$

$$- \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(4)}(x - x_2,\ y - y_2,\ z - z_2)$$

est une série convergente en dehors de S_1 et S_2 *ayant pour somme zéro.* On peut donc ajouter cette série $S(x,\ y,\ z)$ au développement (28) sans que ce développement cesse de représenter $F(x,\ y,\ z)$.

Mais l'on peut préciser l'indétermination du développement (28) et montrer que, dans ce développement, les fonctions

$$V_{-1}^{(1)}(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1),\ \ldots,\ V_{-\nu}^{(1)}(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$$

peuvent être prises arbitrairement pour toutes les valeurs de ν inférieures à un nombre déterminée $n + 1$ aussi grand que l'on voudra. Pour mettre ce fait en évidence désignons en général par

$$(33) \qquad \frac{\partial^{p+q+r} S(x,\ y,\ z)}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$$

la série déduite de $S(x,\ y,\ z)$ en prenant la dérivée $\dfrac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$ de chacun des termes de $S(x,\ y,\ z)$; toutes les séries (33) seront de la même forme que la série $S(x,\ y,\ z)$ et la somme de chacune d'elles sera aussi *zéro.* Nous pouvons de plus supposer que, dans $S(x,\ y,\ z)$, la fonction

$$V_{-1}^{(3)}(x - x_1\,,\ y - y_1\,,\ z - z_1)$$

qui est égale à

$$(34) \qquad \frac{A}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}$$

ne soit pas identiquement nulle, c'est à dire que la constante A soit différente de zéro; par exemple, pour qu'il en soit ainsi, il suffit de prendre pour la fonction $\varphi(x, y, z)$ qui a servi à former $S(x, y, z)$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2}},$$

α, β, γ étant les coordonnées d'un point commun aux deux sphères; alors $A = 1$. Cela posé nous pouvons, sans changer la somme de la série (28), lui ajouter le développement

$$\sum_{p,q,r} \lambda_{p,q,r} \frac{\partial^{p+q+r} S(x, y, z)}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières positives ou nulles des trois nombres p, q, r sous la condition

$$p + q + r \leqq n - 1,$$

les quantités $\lambda_{p,q,r}$ étant des paramètres arbitraires. Mais comme la fonction la plus générale

$$V_{-\nu}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

est composée linéairement avec les dérivées d'ordre $\nu - 1$ de la fonction (34), l'on pourra déterminer les paramètres $\lambda_{p,q,r}$ de telle façon que, dans la nouvelle série

$$S(x, y, z) + \sum_{p,q,r} \lambda_{p,q,r} \frac{\partial^{p+q+r} S(x, y, z)}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r},$$

les $2\nu - 1$ coefficients qui figurent dans chacune des fonctions

$$V_{-\nu}(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

où $\nu = 1, 2, \ldots, n$, prennent des valeurs données d'avance. Ces coefficients peuvent donc être pris arbitrairement comme nous l'avons annoncé.

8. Le théorème du § 7 peut être généralisé de la façon suivante.

Soient p sphères de centres respectifs

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \ldots, (x_p, y_p, z_p)$$

telles que deux d'entre elles ne soient pas entièrement intérieures l'une à l'autre; toute fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, uniforme dans l'espace situé à l'extérieur de toutes les sphères et régulière en tous les points de cet espace (y compris le point ∞), est développable dans cet espace en une série convergente de la forme

$$F(x, y, z) = F(\infty) + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(k)}(x - x_k, y - y_k, z - z_k). \tag{35}$$

Suivant que les sphères considérées ont des points communs ou non, ce développement est possible d'une infinité de manières ou d'une seule manière.

La démonstration de ce théorème est la même que pour le cas de deux sphères. Dans le cas actuel, l'intégrale du second membre de l'équation (23) se partage en p intégrales à chacune desquelles on applique la même analyse qu'à l'intégrale (29).

9. Il peut arriver que l'espace extérieur à la fois à toutes les sphères considérées se compose de plusieurs portions distinctes

$$E, E', E'', \ldots,$$

telles que l'on ne puisse passer de l'une à l'autre sans rencontrer la surface de l'une des sphères. Imaginons qu'il en soit ainsi et considérons l'un de ces espaces E par exemple; supposons pour fixer les idées que l'espace E ne s'étende pas à l'infini. Soit $F(x, y, z)$ une fonction uniforme dans E et régulière en tous les points de E. L'espace E sera limité par une surface fermée S formée de portions de sphères tournant leurs convexités vers l'intérieur de E; l'on aura, en désignant par (a, b, c) un point quelconque de l'espace E et appliquant la formule (22),

$$F(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(T\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial T}{\partial n}\right) d\sigma; \tag{36}$$

l'intégrale du second membre se composera de p parties étendues respectivement aux portions des p sphères considérées qui constituent la surface S. En appliquant à chacune de ces parties l'analyse employée précédemment pour l'intégrale (29), on verra que, en tous les points de l'espace E, la fonction F est représentée par une série de la forme

$$F(a, b, c) = \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(k)}(a - x_k, b - y_k, c - z_k). \tag{37}$$

Si le point (a, b, c) appartient à un autre des espaces E', E'', ... etc. situés à l'extérieur des p sphères, la série du second membre de l'équation (37) est encore convergente, mais sa somme est alors *nulle;* en effet dans ce cas l'intégrale du second membre de (36) est égale *à zéro.* Si l'espace E était indéfini les mêmes faits se produiraient. Une fonction F uniforme dans E et régulière en tous les points de E serait, dans cet espace, représentée par une série de la forme (37) augmentée du terme constant $F(\infty)$. Cette série serait encore convergente si le point (x, y, z) était dans un des autres espaces E', E'', ... etc., mais sa somme serait alors nulle.

On voit que les résultats précédents sont entièrement analogues à ceux que j'ai indiqués pour les fonctions d'une variable imaginaire (Comptes Rendus, 1er Mai 1882) et dont j'ai donné des exemples dans les Acta Mathematica, T. 1, p. 145.

10. Pour terminer ce sujet, j'énoncerai une proposition plus générale encore.

Considérons l'espace formé par tous les points situés à la fois à l'extérieur de p sphères de centres

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2); \ldots, (x_p, y_p, z_p)$$

et à l'intérieur de q sphères de centres

$$(x_{p+1}, y_{p+1}, z_{p+1}), (x_{p+2}, y_{p+2}, z_{p+2}), \ldots, (x_{p+q}, y_{p+q}, z_{p+q});$$

cet espace pourra être composé de plusieurs portions séparées E, E', E'', ... etc. telles que l'on ne puisse passer de l'une à l'autre sans rencontrer la surface de l'une des sphères; une fonction $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, uniforme dans l'espace E et régulière en tous les points de E est représentée en tous ces points par une série de la forme

$$(38) \qquad F(x, y, z) = C + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{-\nu}^{(k)}(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$$
$$+ \sum_{h=p+1}^{h=p+q} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} V_{\nu}^{(h)}(x - x_h, y - y_h, z - z_h);$$

C désignant une constante. Cette série contient comme on le voit les fonctions V d'arguments

$$x - x_k, \ y - y_k, \ z - z_k \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

avec des indices négatifs, et les fonctions V d'arguments

$$x - x_h, \ y - y_h, \ z - z_h \qquad (h=p+1, p+2, \ldots, p+q)$$

avec des indices positifs. La démonstration repose sur l'emploi des formules (22) ou (23) suivant que E est fini ou s'étend à l'infini.

Ces formules générales paraissent devoir présenter de l'intérêt dans les problèmes de potentiel ou d'équilibre de température relatifs à des corps limités par des portions de surfaces sphériques.

L'on pourrait former un développement général analogue à (38) et procédant suivant les fonctions de Lamé, pour représenter des fonctions F uniformes et régulières dans un espace limité par des portions d'ellipsoïde. L'on obtiendrait ainsi des résultats analogues à ceux que j'ai indiqués pour les fonctions d'une variable imaginaire (Comptes Rendus, séance du 9 Avril 1883). Mais je laisse cette question de côté pour le moment, afin d'appliquer à une classe spéciale de fonctions F les théorèmes indiqués dans cette première partie.

Deuxième partie.

Sur les fonctions de x, y, z satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ et possédant trois groupes de périodes simultanées.

1. Soient

$$A(a,\ b,\ c),\ \ A'(a',\ b',\ c'),\ \ A''(a'',\ b'',\ c'')$$

trois points non situés dans un même plan avec l'origine O des coordonnées, c'est à dire tels que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Les fonctions dont nous nous occupons dans cette deuxième partie sont des fonctions uniformes $F(x,\ y,\ z)$ des trois variables réelles x, y, z satisfaisant à l'équation $\Delta F = 0$ et telles que l'on ait

$$(1)\quad F(x + ma + m'a' + m''a'',\ y + mb + m'b' + m''b'',\ z + mc + m'c' + m''c'') \\ = F(x,\ y,\ z);$$

m, m', m'' étant des entiers quelconques.

Ces fonctions présentent la plus grande analogie avec la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable imaginaire.

Comme l'on peut toujours changer les signes de a, b, c sans rien changer à la propriété fondamentale exprimée par l'équation (1), attendu que m est un entier positif, négatif ou nul, nous pouvons supposer que l'on ait choisi les signes des coordonnées des trois points A, A', A'' de façon que le déterminant D soit positif. Si l'on désigne par l, l', l'' les trois longueurs OA, OA', OA'' et par

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma; \qquad \alpha',\ \beta',\ \gamma'; \qquad \alpha'',\ \beta'',\ \gamma''$$

les cosinus des angles que font respectivement les directions OA, OA', OA'' avec les trois axes coordonnés, l'on aura

$$D = ll'l''d$$

où

$$d = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \quad d > 0.$$

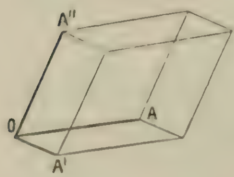
Appelons θ l'angle $A'OA''$, θ' l'angle $A''OA$, θ'' l'angle AOA'; alors la perpendiculaire au plan $A'OA''$ menée du côté de OA a pour cosinus directeurs

$$(2) \qquad \lambda = \frac{\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''}{\sin\theta}, \qquad \mu = \frac{\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''}{\sin\theta}, \qquad \nu = \frac{\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''}{\sin\theta};$$

en effet la quantité

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma$$

est positive puisqu'elle est égale à $\frac{d}{\sin\theta}$. Nous déduisons de (2), par une permutation circulaire des accents, les cosinus directeurs λ', μ', ν' de la portion de perpendiculaire au plan $A''OA$ située par rapport à ce plan du même côté que OA'; enfin nous obtiendrons de même les cosinus directeurs de la troisième perpendiculaire λ'', μ'', ν'' à la face AOA'. Si nous construisons un parallélépipède sur les trois lignes OA, OA', OA'', nous voyons que λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la portion de normale à la face $A'OA''$ dirigée vers l'intérieur du parallélépipède; la même chose a lieu pour λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν''.



Nous appellerons *parallélépipède élémentaire* le parallélépipède que nous venons de construire ou tout autre parallélépipède qui est déduit de celui-là par une translation. Au point de vue analytique, les points situés dans un parallélépipède élémentaire sont les points ayant pour coordonnées

$$x = x_0 + \varepsilon a + \varepsilon' a' + \varepsilon'' a''$$

$$y = y_0 + \varepsilon b + \varepsilon' b' + \varepsilon'' b''$$

$$z = z_0 + \varepsilon c + \varepsilon' c' + \varepsilon'' c''$$

où (x_0, y_0, z_0) sont des constantes, ε, ε', ε'' des nombres positifs variables vérifiant les conditions

$$0 \leqq \varepsilon < 1, \qquad 0 \leqq \varepsilon' < 1, \qquad 0 \leqq \varepsilon'' < 1.$$

D'après l'équation fondamentale (1), dès qu'une fonction $F(x, y, z)$ est connue dans un parallélépipéde élémentaire, elle est, par là-même, connue dans tout l'espace.

Théorème I. Une fonction F qui est régulière en tous les points d'un parallélépipéde élémentaire est une constante.

En effet une pareille fonction serait régulière en tous les points de l'espace, d'après la relation (1), et serait une constante en vertu du théorème I de la première partie.

D'après ce théorème, une fonction F admet nécessairement des singularités dans un parallélépipéde élémentaire. Plaçons nous dans le cas le plus simple et supposons que la fonction F n'ait dans un parallélépipéde élémentaire qu'un nombre fini p de points singuliers qui seront par suite des points isolés. Soient $R_1, R_2, \ldots, R_p$ les résidus relatifs à ces points. L'on a alors le théorème suivant:

Théorème II. La somme des résidus

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_p$$

est égale à 0.

En effet, d'après le théorème VII de la première partie, on a

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_p = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma$$

l'intégrale double étant étendue à la surface du parallélépipéde élémentaire. Cette intégrale se partage en six parties étendues respectivement aux six faces du parallélépipéde; nous allons montrer que les deux parties relatives à deux faces opposées sont égales et de signes contraires. L'intégrale double en question est donc nulle et le théorème est démontré. Sur la première face $A'OA''$ du parallélépipéde élémentaire on a, en un point (x, y, z),

$$\frac{\partial F}{\partial n} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial x} - \mu\frac{\partial F}{\partial y} - \nu\frac{\partial F}{\partial z}$$

puisque $\frac{\partial F}{\partial n}$ est la dérivée prise suivant la normale vers l'extérieur et que λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la normale vers l'intérieur. Prenons maintenant le point $(x + a,\ y + b,\ z + c)$ qui est situé sur la face opposée à $A'OA''$ et qui décrit cette face quand le point (x, y, z) décrit $A'OA''$. En ce point la fonction F prend la valeur

$$F(x + a,\ y + b,\ z + c) = F(x,\ y,\ z),$$

les trois dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ reprennent aussi les mêmes valeurs; par suite en ce point

$$\frac{\partial F}{\partial n} = \lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \mu\frac{\partial F}{\partial y} + \nu\frac{\partial F}{\partial z},$$

car au point $(x + a,\ y + b,\ z + c)$ les cosinus directeurs de la normale extérieure sont λ, μ, ν. Ainsi aux points correspondants (x, y, z), $(x + a,\ y + b,\ z + c)$ des deux faces opposées les valeurs de $\frac{\partial F}{\partial n}$ sont égales et de signes contraires; d'ailleurs les éléments de surface $d\sigma$ sont égaux; donc les deux intégrales

$$\iint \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma$$

étendues à ces deux faces ont une somme nulle. La même chose a lieu pour les deux autres couples de faces opposées; ce qui démontre le théorème.

L'on conclut de ce théorème qu'il est impossible qu'une fonction F ait dans un parallélépipéde élémentaire un seul pôle du premier degré.

2. Il résulte du théorème I qu'une fonction F ayant un nombre fini de points singuliers dans un parallélépipéde élémentaire est déterminée, à une constante additive près, quand on connaît ses points singuliers dans un parallélépipéde élémentaire et les parties principales correspondantes. En effet, soient F et F_1 deux fonctions vérifiant l'équation fondamentale (1) et possédant les mêmes points singuliers dans un parallélépipéde avec les mêmes parties principales; la différence $F - F_1$ est régulière en tous les points du parallélépipéde; elle est donc *constante* d'après le théorème I.

Nous allons former une fonction à l'aide de laquelle nous pourrons donner l'expression d'une fonction F ayant dans un parallélépipède élémentaire un nombre fini de points singuliers, en connaissant ces points et les parties principales correspondantes. Cette fonction est analogue à la fonction $Z(u)$ de M. HERMITE.

Pour cela, appliquons le théorème IV de la première partie à la formation d'une fonction $Z(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta Z = 0$ et ayant pour pôles du premier degré avec le résidu $+1$ les points ayant pour coordonnées

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_\nu &= ma + m'a' + m''a'' \\ b_\nu &= mb + m'b' + m''b'' \\ c_\nu &= mc + m'c' + m''c'', \end{aligned}$$

où les nombres m, m', m'' prennent toutes les valeurs entières positives, négatives et nulles. Cette fonction Z aura, par suite, un pôle et un seul dans chaque parallélépipède élémentaire. Voici comment l'on pourra la former.

Posons

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = +\sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu}{r\rho}$$

$$R = +\sqrt{(x - a_\nu)^2 + (y - b_\nu)^2 + (z - c_\nu)^2} = +\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2}$$

où a_ν, b_ν, c_ν désignent les quantités (3); soit enfin ε un nombre positif moindre que l'unité. Mettons à part la combinaison

$$m = 0,\quad m' = 0,\quad m'' = 0$$

pour laquelle $R = r$, et supposons que l'un au moins des trois nombres m, m', m'' ne soit pas nul; alors ρ est différent de zéro. La fonction

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2}} = \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2r}{\rho}\cos\varphi + \frac{r^2}{\rho^2}}}$$

est, pour toutes les positions du point $M(x, y, z)$ telles que $\frac{r}{\rho} \leqq \varepsilon$, développable en une série convergente de la forme

$$\frac{1}{R} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{r^\nu}{\rho^{\nu+1}} P_\nu(\cos\varphi), \qquad P_0(\cos\varphi) = 1$$

où P_ν est un polynôme de Legendre. Comme $P_\nu(\cos\varphi)$ est compris entre -1 et $+1$, si l'on forme la différence

$$f(x, y, z; m, m', m'') = \frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos\varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos\varphi)$$
$$= \sum_{\nu=3}^{\nu=\infty} \frac{r^\nu}{\rho^{\nu+1}} P_\nu(\cos\varphi),$$

cette différence est, en valeur absolue, moindre que la somme

$$\sum_{\nu=3}^{\nu=\infty} \frac{r^\nu}{\rho^{\nu+1}}$$

ou, a fortiori puisque $\frac{r}{\rho} \leqq \varepsilon$, moindre que

$$\frac{r^3}{\rho^4}(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots) = \frac{r^3}{\rho^4} \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Ainsi, sous la condition $\frac{r}{\rho} \leqq \varepsilon$, on a

$$(4) \qquad |f(x, y, z; m, m', m'')| \leqq \frac{r^3}{\rho^4} \frac{1}{1 - \varepsilon}.$$

Désignons par le symbole Σ' une sommation étendue à toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles de m, m', m'', la combinaison

$$m = m' = m'' = 0$$

étant seule exceptée. On sait, d'après un théorème qu'Eisenstein a indiqué dans le tome 35 du Journal de Crelle et dont M. Jordan a

donné une démonstration très-simple dans le tome IX du Bulletin de la Société Mathématique, que la série

$$(5) \qquad \sum{}' \frac{1}{\rho^4}$$

est convergente. On en conclut que la série

$$(6) \qquad Z(x, y, z) = \frac{1}{r} + \sum{}' f(x, y, z; m, m', m'')$$

$$= \frac{1}{r} + \sum{}' \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} P_1(\cos\varphi) - \frac{r^2}{\rho^3} P_2(\cos\varphi)\right]$$

est convergente en tous les points distincts des points (a_ν, b_ν, c_ν) et définit une fonction possédant les propriétés annoncées. En effet, soit $M'(x', y', z')$ un point ne coïncidant avec aucun des pôles (a_ν, b_ν, c_ν) et δ un nombre assez petit pour que, dans le domaine δ du point M', il n'y ait aucun de ces pôles; posons en outre $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. Nous allons montrer que la série (6) est uniformément convergente en tous les points du domaine δ du point M'. Soit α un nombre positif donné d'avance aussi petit que l'on veut, l'on pourra assigner un nombre positif N remplissant les deux conditions suivantes

1°
$$\frac{r' + \delta}{N} \leqq \varepsilon.$$

2° la somme

$$\sum{}'' \frac{1}{\rho^4}$$

étendue à toutes les valeurs de m, m', m'' pour lesquelles $\rho \geqq N$ est moindre que $\frac{\alpha(1 - \varepsilon)}{(r' + \delta)^3}$. On peut toujours remplir cette seconde condition puisque la série $\sum{}' \frac{1}{\rho^4}$ est convergente.

Le nombre N étant ainsi déterminé, je dis que la valeur absolue de la somme

$$\sum{}'' f(x, y, z; m, m', m''),$$

étendue à tous les termes de la série (6) dans lesquels $\rho \geqq N$, est moindre que α, quelle que soit la position du point (x, y, z) dans le domaine δ du point M'. En effet pour toutes les positions du point M dans ce domaine on a

$$r \leqq r' + \delta,$$

donc pour toutes les valeurs de m, m', m'' pour lesquelles $\rho \geqq N$, on a

$$\frac{r}{\rho} \leqq \varepsilon,$$

en vertu de la 1ère condition imposée à N. L'on a donc, pour ces mêmes valeurs de m, m', m'',

$$|f(x, y, z; m, m', m'')| \leqq \frac{r^3}{\rho^4} \frac{1}{1-\varepsilon}$$

d'après l'équation (4) et par suite

$$\left|\Sigma'' f(x, y, z; m, m', m'')\right| \leqq \frac{r^3}{1-\varepsilon} \sum{}'' \frac{1}{\rho^4};$$

or d'après la 2e condition imposée à N

$$\sum{}'' \frac{1}{\rho^4} < \frac{\alpha(1-\varepsilon)}{(r'+\delta)^3};$$

donc

$$\left|\Sigma'' f(x, y, z; m, m', m'')\right| < \frac{r^3}{(r'+\delta)^3}\alpha \leqq \alpha;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le même raisonnement montre que la différence

$$Z(x, y, z) - \frac{1}{\sqrt{(x-a_\nu)^2 + (y-b_\nu)^2 + (z-c_\nu)^2}}$$

est régulière au point (a_ν, b_ν, c_ν).

3. *Propriétés fondamentales de la fonction Z.* Remarquons que, dans le terme générale de la série (6), la quantité que l'on retranche de $\frac{1}{R}$ est un polynôme du second degré en x, y, z; en effet

$$P_1(\cos\varphi) = \cos\varphi, \quad P_2(\cos\varphi) = \frac{3}{2}\left(\cos^2\varphi - \frac{1}{3}\right)$$

et par suite

$$rP_1(\cos\varphi) = \frac{1}{\rho}(xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu)$$

$$r^2P_2(\cos\varphi) = \frac{3}{2}\left[\frac{(xa_\nu + yb_\nu + zc_\nu)^2}{\rho^2} - \frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right];$$

l'une quelconque des six dérivées partielles du second ordre de cette quantité par rapport à x, y, z est donc une constante. Si nous prenons, par exemple, la dérivée $\frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial x^2}$, nous avons

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \sum{}' \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial x^2} - \frac{3}{\rho^3}\left(\frac{a_\nu^2}{\rho^2} - \frac{1}{3}\right)\right];$$

remplaçons x, y, z respectivement par $x+a$, $y+b$, $z+c$; alors r devient r_1 et R devient R_1, et l'on a

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 Z(x+a, y+b, z+c)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} + \sum{}' \left[\frac{\partial^2 \frac{1}{R_1}}{\partial x^2} - \frac{3}{\rho^3}\left(\frac{a_\nu^2}{\rho^2} - \frac{1}{3}\right)\right].$$

En retranchant ces deux séries membre à membre, nous obtenons l'équation

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 Z(x+a, y+b, z+c)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \sum{}' \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{R_1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial x^2}\right) = \sum \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{R_1}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial x^2}\right)$$

la dernière somme Σ étant étendue à *toutes* les valeurs entières de m, m', m'' de $-\infty$ à $+\infty$. Or il est facile de voir que cette dernière

somme est nulle. En effet $\dfrac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial x^2}$ est une certaine fonction de m, m', m''; désignons cette fonction par $\psi(m, m', m'')$; alors on aura

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{R_1}}{\partial x^2} = \psi(m - 1, m', m'');$$

on voit en effet, d'après la définition de $\frac{1}{R}$, que remplacer dans $\frac{1}{R}$, x, y, z par $x + a$, $y + b$, $z + c$ revient à changer m en $m - 1$. La somme Σ pourra donc s'écrire

$$(9') \qquad \sum [\psi(m - 1, m', m'') - \psi(m, m', m'')];$$

supposons que, donnant à m', m'' des valeurs entières fixes quelconques, l'on fasse d'abord la sommation par rapport à m de $-\mu$ à $+\mu$; on aura à former

$$(10) \qquad \sum_{m=-\mu}^{m=+\mu} [\psi(m - 1, m', m'') - \psi(m, m', m'')],$$

mais alors il est clair que, dans cette dernière somme, les termes se détruisent deux à deux sauf le premier et le dernier, et que cette somme est égale à

$$\psi(-\mu - 1, m', m'') - \psi(\mu, m', m'');$$

si l'on suppose que μ augmente indéfiniment cette dernière quantité tend vers zéro. Ainsi pour $\mu = \infty$ la somme (10) est nulle; la somme (9') est donc nulle aussi, et l'équation (9) donne comme conséquence

$$\frac{\partial^2 Z(x + a, y + b, z + c)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial x^2} = 0.$$

On démontrerait de même que toutes les dérivées partielles du second ordre de la différence

$$Z(x + a, y + b, z + c) - Z(x, y, z)$$

sont égales à zéro. Donc cette différence ne peut être qu'une fonction linéaire de x, y, z. Nous avons ainsi l'équation

$$(11) \qquad Z(x+a,\ y+b,\ z+c) - Z(x,\ y,\ z) = Ax + By + Cz + E;$$

on a de même

$$(11') \qquad Z(x+a',\ y+b',\ z+c') - Z(x,\ y,\ z) = A'x + B'y + C'z + E'$$

$$(11'') \qquad Z(x+a'',\ y+b'',\ z+c'') - Z(x,\ y,\ z) = A''x + B''y + C''z + E'',$$

les lettres A, B, C, E; A', B', C', E'; A'', B'', C'', E'' désignant des constantes qui dépendent des neuf quantités a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', et que l'on pourrait calculer effectivement en formant à l'aide de la série (6) les différences (11), (11') et (11'').

L'on peut indiquer a priori un certain nombre de relations entre ces différentes constantes. Dans l'équation (11) remplaçons x, y, z par $x+a'$, $y+b'$, $z+c'$, puis ajoutons à l'équation (11'); nous avons la relation

$$(12) \qquad Z(x+a+a',\ y+b+b',\ z+c+c') - Z(x,\ y,\ z)$$
$$= Ax + By + Cz + A'x + B'y + C'z + E + E' + Aa' + Bb' + Cc';$$

mais si nous faisions l'inverse, c'est à dire si dans l'équation (11') nous remplaçions x, y, z par $x+a$, $y+b$, $z+c$ et que nous ajoutions l'équation ainsi obtenue à l'équation (11), nous trouverions, pour cette même différence (12), la valeur

$$Ax + By + Cz + A'x + B'y + C'z + E + E' + A'a + B'b + C'c;$$

l'on a donc

$$(13) \qquad Aa' + Bb' + Cc' = A'a + B'b + C'c;$$

l'on trouve de même

$$(13') \qquad A'a'' + B'b'' + C'c'' = A''a' + B''b' + C''c'$$

$$(13'') \qquad A''a + B''b + C''c = Aa'' + Bb'' + Cc''.$$

Voici encore une autre relation entre ces constantes. Considérons la fonction

$$Z_1(x, y, z) = Z\left(x - \frac{a}{2}, \ y - \frac{b}{2}, \ z - \frac{c}{2}\right)$$

qui admet pour pôles du premier degré de résidu $+1$ les points de coordonnées

$$\frac{a}{2} + ma + m'a' + m''a'', \ \frac{b}{2} + mb + m'b' + m''b'', \ \frac{c}{2} + mc + m'c' + m''c''$$

et appliquons à cette fonction le théorème VII de la 1[ère] partie en prenant pour surface d'intégration S le parallélépipède élémentaire représenté dans la figure précédente (page 348). Comme la fonction $Z_1(x, y, z)$ n'admet dans ce parallélépipède qu'un seul pôle $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ de résidu $+1$, l'on a l'équation

$$(14) \qquad \iint \frac{\partial Z_1(x, y, z)}{\partial n} d\sigma = -4\pi.$$

Prenons les portions de cette intégrale double qui se rapportent aux faces opposées du parallélépipède. Au point (x, y, z) situé sur la face $A'OA''$ on a

$$\frac{\partial Z_1(x, y, z)}{\partial n} = -\lambda \frac{\partial Z_1(x, y, z)}{\partial x} - \mu \frac{\partial Z_1}{\partial y} - \nu \frac{\partial Z_1}{\partial z};$$

au point $(x + a, y + b, z + c)$ situé sur la face opposée on a

$$\frac{\partial Z_1(x + a, y + b, z + c)}{\partial n} = \lambda \frac{\partial Z_1(x + a, y + b, z + c)}{\partial x} + \mu \frac{\partial Z_1}{\partial y} + \nu \frac{\partial Z_1}{\partial z};$$

comme $d\sigma$ est le même aux points (x, y, z) et $(x + a, y + b, z + c)$ la somme des éléments de l'intégrale double relatifs à ces deux points est

$$(15) \qquad \lambda \left[\frac{\partial Z_1(x + a, y + b, z + c)}{\partial x} - \frac{\partial Z_1(x, y, z)}{\partial x}\right] d\sigma + \dots$$

où l'on n'a écrit que le premier terme; mais d'après l'équation (11) la différence

$$\frac{\partial Z_1(x+a,\, y+b,\, z+c)}{\partial x} - \frac{\partial Z_1(x,\, y,\, z)}{\partial x}$$

est égale à A; la somme (15) est donc

$$(\lambda A + \mu B + \nu C)\, d\sigma$$

et la somme des parties de l'intégrale (14) étendues à la face $A'OA''$ et à la face opposée est

$$(\lambda A + \mu B + \nu C)\iint\limits_{A'OA''} d\sigma = (\lambda A + \mu B + \nu C) l'l'' \sin\theta$$

puisque $l'l''\sin\theta$ est la surface de la face $A'OA''$. En opérant de même pour les deux autres couples de faces opposées, l'on obtient, à la place de l'équation (14), l'équation

$$(\lambda A + \mu B + \nu C) l'l'' \sin\theta + (\lambda' A' + \mu' B' + \nu' C') l'' l \sin\theta'$$
$$+ (\lambda'' A'' + \mu'' B'' + \nu'' C'') l l' \sin\theta'' = -4\pi.$$

Enfin l'on déduit, de ce que $Z(x, y, z)$ ne change pas quand x, y, z changent de signes en même temps, la relation

$$E = \frac{1}{2}(Aa + Bb + Cc)$$

et deux autres analogues pour E' et E''.

4. *Formation des fonctions $F(x, y, z)$ vérifiant l'équation $\Delta F = 0$ et admettant pour x, y, z les trois groupes de périodes* (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'').

Nous allons montrer maintenant comment l'on peut, à l'aide de la fonction $Z(x, y, z)$, former les fonctions F dont il est question au commencement de cette deuxième partie.

Supposons, pour prendre d'abord le cas le plus simple, que la fonction F qu'il s'agit de former n'ait dans un parallélépipède élémentaire d'autres points singuliers que des pôles. Ces pôles seront alors en nombre fini p; nous désignerons leurs coordonnées respectives par

$$(x_1, y_1, z_1),\ (x_2, y_2, z_2),\ \ldots,\ (x_p, y_p, z_p)$$

et les résidus correspondants par $R_1, R_2, \ldots, R_p$.

Imaginons, en premier lieu, que les pôles soient tous du premier degré; la fonction cherchée F sera

$$(16)\qquad F(x, y, z) = L + Mx + Ny + Pz + \sum_{k=1}^{k=p} R_k Z(x - x_k,\ y - y_k,\ z - z_k),$$

les constantes M, N, P étant déterminées par les équations du premier degré

$$(17)\qquad \left|\begin{aligned} Ma + Nb + Pc &= \sum_{k=1}^{k=p} (AR_k x_k + BR_k y_k + CR_k z_k)\\ Ma' + Nb' + Pc' &= \sum_{k=1}^{k=p} (A'R_k x_k + B'R_k y_k + C'R_k z_k)\\ Ma'' + Nb'' + Pc'' &= \sum_{k=1}^{k=p} (A''R_k x_k + B''R_k y_k + C''R_k z_k).\end{aligned}\right.$$

En effet,

1° la fonction définie par l'équation (16) est uniforme et vérifie l'équation $\Delta F = 0$, puisqu'il en est ainsi pour chacune des fonctions qui la composent linéairement;

2° cette fonction admet dans le parallélépipède considéré les seuls points singuliers (x_k, y_k, z_k) qui sont des pôles du premier degré de résidus R_k, puisque chacune des fonctions $R_k Z(x - x_k,\ y - y_k,\ z - z_k)$ admet dans le parallélépipède considéré le seul pôle du premier degré (x_k, y_k, z_k) avec le résidu R_k;

3° enfin les trois différences

$$\begin{aligned} &F(x + a,\ y + b,\ z + c) - F(x, y, z)\\ &F(x + a',\ y + b',\ z + c') - F(x, y, z)\\ &F(x + a'',\ y + b'',\ z + c'') - F(x, y, z)\end{aligned}$$

sont *nulles;* la première de ces différences sera, par exemple

$$(18)\qquad Ma + Nb + Pc$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=p} R_k \big[Z(x - x_k + a,\ y - y_k + b,\ z - z_k + c) - Z(x - x_k,\ y - y_k,\ z - z_k)\big]$$

mais en vertu de l'équation (11) où l'on remplacerait x, y, z par $x - x_k$, $y - y_k$, $z - z_k$ le coefficient de R_k est

$$A(x - x_k) + B(y - y_k) + C(z - z_k) + E;$$

la quantité (18) est donc

$$Ma + Nb + Pc + (Ax + By + Cz + E)\sum_{k=1}^{k=p} R_k$$

$$- \sum_{k=1}^{k=p} (AR_k x_k + BR_k y_k + CR_k z_k)$$

c'est à dire *zéro* en vertu de la relation démontrée précédemment (Théorème II)

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_p = 0,$$

et de la première des équations (17) déterminant M, N, P.

La fonction (16) est donc bien la fonction cherchée qui, comme nous l'avons vu § 2, est entièrement déterminée à une constante additive L près.

Nous avons supposé que les pôles sont tous du premier degré; le cas le plus général où les pôles sont d'un degré quelconque se traite de la même façon. Désignons en effet par

(19) $$\varphi_k(x, y, z) = V_{-1}^{(k)}(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$$
$$+ V_{-2}^{(k)}(x - x_k, y - y_k, z - z_k) + \ldots + V_{-n_k}^{(k)}(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$$

la partie principale de la fonction F relative au pôle (x_k, y_k, z_k) d'un degré quelconque n_k. Comme la fonction la plus générale

$$V_{-n}(x - x_k, y - y_k, z - z_k)$$

d'indice négatif est composée linéairement avec les dérivées partielles d'ordre $n - 1$ de

$$\frac{1}{r_k} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2}} \text{ [1]}$$

[1] Première partie, § 1.

on peut mettre la partie principale φ_k sous la forme

$$(19') \qquad \varphi_k(x, y, z) = \sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=n_k-1} R^{(k)}_{f,g,h} \frac{\partial^{f+g+h}\frac{1}{r_k}}{\partial x^f \partial y^g \partial z^h},$$

la sommation étant étendue à certaines valeurs entières positives ou nulles de f, g, h choisies de telle façon que dans le second membre de (19') figurent seulement toutes les dérivées partielles de $\frac{1}{r_k}$ *linéairement indépendantes* jusqu'à celles de l'ordre $n_k - 1$ inclusivement.[1] Le premier terme de la somme (19') est celui qui correspond à $f = g = h = 0$

$$R^{(k)}_{0,0,0} \frac{1}{r_k};$$

le coefficient $R^{(k)}_{0,0,0}$ n'est donc autre chose que le résidu R_k.

Cela posé, la fonction cherchée $F(x, y, z)$ sera

$$(20) \qquad F(x, y, z) = L + Mx + Ny + Pz$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=n_k-1} R^{(k)}_{f,g,h} \frac{\partial^{f+g+h} Z(x - x_k,\ y - y_k,\ z - z_k)}{\partial x^f \partial y^g \partial z^h},$$

la sommation étant étendue aux mêmes valeurs que précédemment et les constantes M, N, P étant déterminées par les équations

$$(21) \qquad \left| \begin{aligned} Ma + Nb + Pc &= AX + BY + CZ \\ Ma' + Nb' + Pc' &= A'X + B'Y + C'Z \\ Ma'' + Nb'' + Pc'' &= A''X + B''Y + C''Z \end{aligned} \right.$$

---

(1) L'on pourrait supposer la sommation (19') étendue à toutes les valeurs positives ou nulles de f, g, h pour lesquelles $f + g + h \leq n_k - 1$, mais alors tous les termes de la somme ne seraient pas linéairement indépendants; ainsi l'on trouverait, dans les dérivées secondes, le groupe de trois termes $R^{(k)}_{2,0,0} \frac{\partial^2 \frac{1}{r_k}}{\partial x^2} + R^{(k)}_{0,2,0} \frac{\partial^2 \frac{1}{r_k}}{\partial y^2} + R^{(k)}_{0,0,2} \frac{\partial^2 \frac{1}{r_k}}{\partial z^2}$ qui pourrait être réduit à *deux* termes à l'aide de l'équation $\Delta \frac{1}{r_k} = 0$.

où l'on a posé pour abréger

$$X = \sum_{k=1}^{k=p} (R_k x_k - R^{(k)}_{1,0,0}), \quad Y = \sum_{k=1}^{k=p} (R_k y_k - R^{(k)}_{0,1,0}), \quad Z = \sum_{k=1}^{k=p} (R_k z_k - R^{(k)}_{0,0,1}).$$

On vérifie encore, comme précédemment, que la fonction définie par l'équation (20) possède bien les propriétés qui déterminent la fonction F à une constante additive près. On remarque pour cela que la fonction

$$\sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=n_k-1} R^{(k)}_{f,g,h} \frac{\partial^{f+g+h} Z(x-x_k,\ y-y_k,\ z-z_k)}{\partial x^f \partial y^g \partial z^h}$$

possède dans le parallélépipède élémentaire considéré le seul pôle (x_k, y_k, z_k) et que la partie principale de cette fonction relativement à ce pôle est précisément $\varphi_k(x, y, z)$; on s'appuie de plus sur les relations (11) et celles qu'on en déduit par des dérivations par rapport à x, y, z.

Pour donner un exemple simple de l'application de la formule (20), formons une fonction F qui admet dans le parallélépipède élémentaire un seul pôle (x_1, y_1, z_1) du second degré: la partie principale relative à ce pôle unique sera

$$\varphi_1 = \lambda_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}$$

avec un résidu nul d'après le théorème II.

La fonction cherchée F est alors

$$F(x, y, z) = L + Mx + Ny + Pz + \lambda_1 \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial Z_1}{\partial y} + \lambda_3 \frac{\partial Z_1}{\partial z}$$

où Z_1 désigne la fonction $Z(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1)$. Les coefficients M, N, P seront donnés par les équations

$$Ma + Nb + Pc + \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = 0$$

$$Ma' + Nb' + Pc' + \lambda_1 A' + \lambda_2 B' + \lambda_3 C' = 0$$

$$Ma'' + Nb'' + Pc'' + \lambda_1 A'' + \lambda_2 B'' + \lambda_3 C'' = 0.$$

La formule (20) pourrait conduire à l'expression d'une fonction F possédant dans un parallélépipéde élémentaire p points singuliers essentiels isolés; il suffirait de supposer que les nombres n_k augmentent indéfiniment. Mais il est plus rigoureux d'employer la méthode suivante qui conduit à des formules intéressantes.

5. Considérons un parallélépipéde élémentaire, celui qui est figuré à la page 348 par exemple, et, dans l'intérieur de ce parallélépipéde une surface fermée S. Soit $F(x, y, z)$ une fonction vérifiant l'équation $\Delta F = 0$, uniforme dans le volume V compris entre la surface du parallélépipéde et la surface S, régulière en tous les points de ce volume, et admettant les trois groupes de périodes

$$(a,\ b,\ c),\ \ (a',\ b',\ c'),\ \ (a'',\ b'',\ c'').$$

Cette fonction F est par suite supposée uniforme et régulière dans tous les volumes homologues de V dans le réseau des parallélépipédes élémentaires construits sur le premier, et elle reprend les mêmes valeurs aux points homologues de ce réseau.

Cette fonction F peut d'ailleurs posséder telles singularités que l'on voudra sur la surface S ou dans l'intérieur de cette surface; elle peut même ne plus exister dans l'intérieur de S.

Soit (ξ, η, ζ) un point appartenant au volume V c'est à dire situé à l'intérieur du parallélépipéde et à l'extérieur de la surface S; traçons une deuxième surface S' extérieure à S mais d'ailleurs aussi rapprochée qu'on le voudra de S, de telle sorte que le point (ξ, η, ζ) soit aussi extérieur à S'. La fonction F est régulière en tous les points de la surface S'.

Je remarque d'abord que l'on a la formule

$$(22)\qquad F(\xi,\ \eta,\ \zeta)$$

$$= \frac{1}{4\pi}\iint \left[Z(\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - z)\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z(\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - z)}{\partial n}\right] d\sigma,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface qui limite le volume V, c'est à dire à la surface du parallélépipéde et à la surface S'. Pour démontrer cette formule, il suffit de remarquer que la fonction

$$Z(\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - z)$$

considérée comme fonction de x, y, z n'a dans tout le volume V que le seul pôle (ξ, η, ζ); de sorte que l'on peut écrire

$$Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \theta(x, y, z)$$

où θ est dans le volume V uniforme et régulière et vérifie l'équation $\Delta\theta = 0$. En remplaçant Z par cette valeur dans l'intégrale (22), nous voyons que cette intégrale se partage en deux: la première

$$\frac{1}{4\pi}\iint\left[\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}\right]d\sigma$$

qui est égale à $F(\xi, \eta, \zeta)$ d'après la formule (22) de la première partie, la deuxième

$$\frac{1}{4\pi}\iint\left(\theta\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)d\sigma$$

qui est nulle puisque θ et F sont régulières en tous les points du volume V. La formule (22) est donc bien démontrée.

L'intégrale double qui figure dans cette formule (22) peut être partagée en deux parties, l'une étendue à la surface S' et que nous désignerons par l'indice S', l'autre étendue à la surface du parallélépipède et que nous désignerons par l'indice P'

$$(22') \quad F(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{P'}\left(Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n}\right)d\sigma + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S'}\left(Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n}\right)d\sigma$$

où la lettre Z sans arguments désigne, ainsi que dans la suite, la fonction $Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$.

Prenons maintenant la première des deux intégrales (22') à savoir celle qui est étendue à la surface du parallélépipède; nous allons montrer que cette intégrale est une fonction linéaire de ξ, η, ζ. Pour cela, remarquons, comme précédemment, que cette intégrale se partage en six parties étendues respectivement aux trois couples de faces opposées du parallélépipède. En un point (x, y, z) de la première face $A'OA''$ on a d'après les notations adoptées (§ 1 et suivants)

$$Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n} = -Z\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \mu\frac{\partial F}{\partial y} + \nu\frac{\partial F}{\partial z}\right) + F\left(\lambda\frac{\partial Z}{\partial x} + \mu\frac{\partial Z}{\partial y} + \nu\frac{\partial Z}{\partial z}\right);$$

au point correspondant $(x+a, y+b, z+c)$ de la face opposée les fonctions Z et F prennent des valeurs que nous désignerons par Z_1 et F_1 et l'on aura

$$Z_1\frac{\partial F_1}{\partial n} - F_1\frac{\partial Z_1}{\partial n} = Z_1\left(\lambda\frac{\partial F_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial F_1}{\partial y} + \nu\frac{\partial F_1}{\partial z}\right) - F_1\left(\lambda\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \mu\frac{\partial Z_1}{\partial y} + \nu\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right);$$

mais puisque la fonction F admet le groupe de périodes (a, b, c) on a $F_1 = F$, $\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z}$. L'élément de surface $d\sigma$ est d'ailleurs le même aux points correspondants x, y, z et $x+a$, $y+b$, $z+c$; la somme des deux éléments correspondants de l'intégrale double est donc

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n} + Z_1\frac{\partial F_1}{\partial n} - F_1\frac{\partial Z_1}{\partial n}\right)d\sigma \\ &\quad = (Z_1 - Z)\left(\lambda\frac{\partial F}{\partial x} + \mu\frac{\partial F}{\partial y} + \nu\frac{\partial F}{\partial z}\right)d\sigma \\ &\quad - F\left[\lambda\frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial x} + \mu\frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial y} + \nu\frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial z}\right]d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Mais la différence $Z_1 - Z$ peut se calculer aisément à l'aide des formules (11); en effet

$$Z_1 = Z(\xi - x - a, \eta - y - b, \zeta - z - c)$$

$$Z = Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z);$$

on obtiendra donc $Z_1 - Z$ en remplaçant dans la formule (11) x, y, z par

$$\xi - x - a, \quad \eta - y - b, \quad \zeta - z - c;$$

on trouve ainsi

$$Z_1 - Z = A(x + a - \xi) + B(y + b - \eta) + C(z + c - \zeta) - E;$$

d'où

$$\frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial(Z_1 - Z)}{\partial z} = C;$$

portant ces valeurs dans l'expression (23), on voit que cette expression devient une fonction linéaire de ξ, η, ζ dont les coefficients sont des fonctions de x, y, z. Si maintenant l'on intégre dans toute l'étendue de la face $A'OA''$ on obtiendra pour l'intégrale une fonction linéaire de ξ, η, ζ; la même chose ayant lieu pour les deux autres couples de faces opposées du parallélépipéde on voit finalement que

$$(24) \qquad \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{P'}\left(Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n}\right)d\sigma = L + M\xi + N\eta + P\zeta,$$

les constantes L, M, N, P ayant des valeurs exprimées par des intégrales définies comme il résulte du calcul précédent. Ainsi

$$(25) \qquad 4\pi M = A\iint\limits_{A'OA''}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + A'\iint\limits_{A''OA}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + A''\iint\limits_{AOA'}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma$$

les intégrales étant étendues respectivement aux faces $A'OA''$, $A''OA$, AOA' du parallélépipéde et les dérivées $\frac{\partial F}{\partial n}$ étant prises sur la normale vers l'extérieur. On aura N et P par des formules analogues obtenues en remplaçant dans (25) A par B et C; ainsi

$$(25') \qquad 4\pi N = B\iint\limits_{A'OA''}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + B'\iint\limits_{A''OA}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + B''\iint\limits_{AOA'}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma.$$

Par conséquent, en remplaçant l'intégrale (24) par sa valeur dans l'équation (22'), on en déduit la formule suivante

$$(26) \qquad F(\xi, \eta, \zeta) = L + M\xi + N\eta + P\zeta + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S'}\left(Z\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial Z}{\partial n}\right)d\sigma,$$

formule intéressante qui est entièrement analogue à celle que j'ai indiquée, pour les fonctions d'une variable imaginaire, dans une Note publiée dans les Comptes Rendus T. 94, p. 936 et dont les résultats ont été généralisés dans les Acta Mathematica T. 1, p. 139 (éq. 15).

Les conséquences qu'on déduit de cette formule sont d'ailleurs semblables à celles que j'ai indiquées dans les deux mémoires que je viens de citer.

6. Supposons d'abord que *la surface S soit une sphère* de centre (x_1, y_1, z_1); la fonction F est alors uniforme et régulière dans le volume V limité par la surface du parallélépipède et la surface de la sphère S intérieure à ce parallélépipède.

Nous allons montrer que, dans ce volume et dans les volumes homologues, la fonction F est alors représentée par une serie de la forme

$$(27)\quad F(\xi, \eta, \zeta) = L + M\xi + N\eta + P\zeta + \sum_{f+g+h=1}^{f+g+h=\infty} R_{f,g,h} \frac{\partial^{f+g+h} Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)}{\partial\xi^f \partial\eta^g \partial\zeta^h},$$

la sommation étant étendue aux *valeurs entières* positives ou nulles de f, g, h, et les coefficients $R_{f,g,h}$ étant des constantes.

Pour établir cette formule (27), remarquons que la fonction Z, c'est à dire

$$Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$$

considérée comme fonction de x, y, z, n'a d'autres pôles que les points

$$(28)\quad \begin{vmatrix} x = \xi + ma + m'a' + m''a'' \\ y = \eta + mb + m'b' + m''b'' \\ z = \zeta + mc + m'c' + m''c''; \end{vmatrix}$$

cette fonction de x, y, z est donc uniforme et régulière dans l'intérieur d'une sphère S'' ayant pour centre le point (x_1, y_1, z_1) et passant par celui des points (28) qui est le plus rapproché de (x_1, y_1, z_1); ce point peut être le point (ξ, η, ζ) ou un autre point situé en dehors du parallélépipède élémentaire. Quoiqu'il en soit cette dernière sphère S'' a certainement un rayon plus grand que celui de la sphère S, et par suite elle contient dans son intérieur la surface S' qui est aussi rapprochée de S que l'on veut et à laquelle est étendue l'intégrale double (26); nous supposerons que l'on ait choisi pour cette surface S' une sphère de

centre (x_1, y_1, z_1) dont le rayon r_1 surpasse celui de la sphère S d'aussi peu qu'on le veut. Mais, dans l'intérieur de la sphère S'', la fonction régulière Z de x, y, z est développable en une série convergente ordonnée par rapport aux fonctions $V_\nu(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ à indices positifs, ou, ce qui est la même chose, en une série ordonnée par rapport aux puissances positives de $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ par la formule de TAYLOR. On a donc, en tous les points x, y, z intérieurs à la sphère S'' et, par suite, en tous les points appartenant à la surface de la sphère S' intérieure à S'',

$$Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z) = Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)$$
$$- \frac{x - x_1}{1} \cdot \frac{\partial Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)}{\partial \xi} - \ldots$$

ou bien

$$(29) \qquad Z(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)$$
$$= \sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=\infty} (-1)^{f+g+h} \frac{(x - x_1)^f (y - y_1)^g (z - z_1)^h}{1.2\ldots f.1.2\ldots g.1.2\ldots h} \cdot \frac{\partial^{f+g+h} Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)}{\partial \xi^f \partial \eta^g \partial \zeta^h}.$$

Si, dans ce développement, on prend les termes homogènes d'un même degré ν $(f + g + h = \nu)$ en $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$, ils forment une fonction $V_\nu(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. Nous allons remplacer Z par ce développement (29) dans l'intégrale (26) en remarquant de plus que, sur la sphère S' de centre x_1, y_1, z_1 et de rayon r_1, la dérivée $\frac{\partial Z}{\partial n}$ est donnée par l'équation

$$\frac{\partial Z}{\partial n} = - \frac{x - x_1}{r_1} \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{y - y_1}{r_1} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{z - z_1}{r_1} \frac{\partial Z}{\partial z}$$

où l'on met le signe $-$ puisque n est la normale extérieure au volume V et par suite intérieure à S'; on conclut de là que

$$(29') \quad \frac{\partial Z}{\partial n} = - \frac{1}{r_1} \sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=\infty} \left| \begin{array}{c} (-1)^{f+g+h} . (f + g + h) \dfrac{(x - x_1)^f (y - y_1)^g (z - z_1)^h}{1.2\ldots f.1.2\ldots g.1.2\ldots h} \\ \times \dfrac{\partial^{f+g+h} Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)}{\partial \xi^f \partial \eta^g \partial \zeta^h} \end{array} \right|.$$

Portant ces deux développements dans l'intégrale (26), nous obtenons pour $F(\xi, \eta, \zeta)$ un développement de la forme annoncée (27), où

(30)
$$4\pi . R_{f,g,h}$$
$$= \frac{(-1)^{f+g+h}}{1.2\ldots f.1.2\ldots g.1.2\ldots h} \iint_{S'} (x-x_1)^f (y-y_1)^g (z-z_1)^h \left[\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{f+g+h}{r_1} F\right] d\sigma;$$

le coefficient de $Z(\xi - x_1, \eta - y_1, \zeta - z_1)$, $R_{0,0,0}$ est *nul;* en effet ce coefficient est donné par

$$4\pi R_{0,0,0} = \iint_{S'} \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma$$

et l'intégrale du deuxième membre est nulle, car elle est égale à l'intégrale

$$\iint_{P'} \frac{\partial F}{\partial n} d\sigma$$

étendue à la surface du parallélépipède élémentaire, laquelle est nulle à cause de la périodicité de F. Ce coefficient $R_{0,0,0}$ ne figure pas dans le développement (27) tel que nous l'avons écrit.

Comme la fonction $F(\xi, \eta, \zeta)$ ne doit pas changer quand on remplace ξ, η, ζ par $\xi + a$, $\eta + b$, $\zeta + c$, il faut que les constantes M, N, P, $R_{1,0,0}$, $R_{0,1,0}$, $R_{0,0,1}$, vérifient la relation

(31) $$Ma + Nb + Pc + AR_{1,0,0} + BR_{0,1,0} + CR_{0,0,1} = 0;$$

en effet, le premier membre de l'équation précédente (31) est la quantité dont croît la série (27) quand ξ, η, ζ croissent de a, b, c, en vertu de l'équation (11). Voici comment nous pouvons vérifier cette relation (31). Remplaçons-y les constantes M, N, P par leurs valeurs (25) et les coefficients $R_{1,0,0}$, $R_{0,1,0}$, $R_{0,0,1}$ par leurs expressions (30); la relation (31) devient

$$(31') \qquad (Aa + Bb + Cc)\iint\limits_{A'OA''}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + (A'a + B'b + C'c)\iint\limits_{A''OA}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma$$

$$+ (A''a + B''b + C''c)\iint\limits_{AOA'}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma$$

$$-\iint\limits_{S'}[A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)]\left(\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{F}{r_1}\right)d\sigma = 0.$$

Pour vérifier cette dernière relation considérons la fonction F et la fonction

$$\Phi = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)$$

qui satisfont aux équations $\Delta F = 0$, $\Delta\Phi = 0$ et qui sont uniformes et régulières dans le volume V compris entre la surface du parallélépipède élémentaire et celle de la sphère S'. D'après le théorème de Green, l'on a l'équation

$$\iint\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)d\sigma = 0$$

l'intégrale étant étendue aux surfaces du parallélépipède et de la sphère S'. On aura donc, d'après les notations déjà employées

$$(32) \qquad \iint\limits_{P}\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)d\sigma + \iint\limits_{S'}\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)d\sigma = 0.$$

On voit facilement, d'après un calcul analogue à celui de la fin du § 3, que l'on a

$$(32') \qquad \iint\limits_{P}\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial n} - F\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)d\sigma = (Aa + Bb + Cc)\iint\limits_{A'OA''}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma$$

$$+ (Aa' + Bb' + Cc')\iint\limits_{A''OA}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma + (Aa'' + Bb'' + Cc'')\iint\limits_{AOA'}\frac{\partial F}{\partial n}d\sigma;$$

et

$$(32'') \qquad \iint_{S'} \left(\Phi \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) d\sigma$$

$$= \iint_{S_r} [A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1)] \left(\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{F}{r_1}\right) d\sigma$$

attendu que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\frac{x - x_1}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{y - y_1}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{z - z_1}{r_1} \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

En portant ces valeurs des intégrales (32′) et (32″) dans l'équation (32) l'on obtient précisément l'équation (31′) qu'il s'agissait de vérifier, à condition de se reporter aux relations (13) et (13″).

On vérifierait de même deux autres relations qui se déduisent de (31) par l'accentuation de a, b, c, A, B, C.

7. On pourra supposer maintenant, pour plus de généralité, que la surface S du § 5 et de l'équation (26) est formée de la surface de p sphères S_1, S_2, ..., S_p toutes situées à *l'intérieur* du parallélépipède élémentaire et ayant pour centres respectifs les points

$$(x_1, y_1, z_1), \ (x_2, y_2, z_2), \ \ldots, \ (x_p, y_p, z_p).$$

La fonction F est alors, dans le volume compris entre la surface du parallélépipède et celles des sphères S_1, S_2, ..., S_p, développable en une série convergente de la forme

$$(33) \qquad F(\xi, \eta, \zeta)$$

$$= L + M\xi + N\eta + P\zeta + \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{f+g+h=0}^{f+g+h=\infty} R^{(k)}_{f,g,h} \frac{\partial^{f+g+h} Z(\xi - x_k, \eta - y_k, \zeta - z_k)}{\partial \xi^f \partial \eta^g \partial \zeta^h},$$

où la somme des coefficients

$$R^{(1)}_{0,0,0} + R^{(2)}_{0,0,0} + \ldots + R^{(p)}_{0,0,0} = 0,$$

et où M, N, P satisfont aux équations (21) dans lesquelles $R_k = R^{(k)}_{0,0,0}$.

Comme cas particulier de ce théorème, supposons que la fonction F admette les trois groupes de périodes a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' et soit régulière en tous les points du parallélépipède excepté aux points

$$(x_1, y_1, z_1), \ (x_2, y_2, z_2), \ \ldots, \ (x_p, y_p, z_p)$$

et que ces points soient des points singuliers essentiels isolés. L'on pourra alors supposer, dans ce qui précède, les rayons des sphères $S_1, S_2, \ldots, S_p$ infiniment petits, et par suite la fonction sera dans tout l'espace représentée par la série (33).

Dans les séries précédentes ordonnées par rapport aux dérivées de $Z(\xi - x_k, \ \eta - y_k, \ \zeta - z_k)$, il suffirait d'étendre la sommation seulement à toutes les valeurs de f, g, h qui donnent des dérivées linéairement indépendantes; mais alors il faudrait évidemment modifier les valeurs des coefficients des dérivées restantes.

8. De même que nous venons d'étudier des fonctions F, à trois groupes de périodes, analogues à la partie réelle d'une fonction doublement périodique, l'on pourrait étudier des fonctions F à deux groupes ou à un seul groupe de périodes. Dans une Note présentée à l'Académie des sciences dans la séance du 24 Septembre 1883 M. A. Chervet a été amené à introduire une fonction F à un groupe de périodes pour représenter le *potentiel d'une masse liquide limitée par deux plans parallèles verticaux*. En posant

$$r_\nu = \sqrt{(x - \nu\pi)^2 + y^2 + z^2}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$$

$$r'_\nu = \sqrt{(x + \nu\pi)^2 + y^2 + z^2}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, \infty,$$

la fonction introduite par M. Chervet est, à un facteur constant près,

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r'_1}\right) + \left(\frac{1}{r'_2} - \frac{1}{r_3}\right) + \cdots$$

Si l'on change x en $x + \pi$, r_0 devient r'_1, r_ν devient $r_{\nu-1}$ et r'_ν devient $r'_{\nu+1}$. Par conséquent

$$F(x + \pi, y, z) = \left(\frac{1}{r'_1} - \frac{1}{r_0}\right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_2}\right) + \left(\frac{1}{r'_3} - \frac{1}{r_2}\right) + \cdots$$

Donc

$$F(x+\pi,\ y,\ z) = -F(x,\ y,\ z)$$

$$F(x+2\pi,\ y,\ z) = F(x,\ y,\ z);$$

par suite cette fonction admet bien un groupe de périodes, à savoir $(2\pi,\ 0,\ 0)$.

Cet exemple conduit à penser que les fonctions F à deux ou trois groupes de périodes trouveront aussi des applications dans la physique mathématique. La formation des fonctions F à un ou deux groupes de périodes repose encore sur l'application du théorème IV de la première partie.

L'élément simple qui pourra servir à former ces fonctions se déduit de la fonction $Z(x, y, z)$ définie dans le § 2 en supposant

1° pour les fonctions à deux groupes de périodes (a, b, c), (a', b', c'), que le point A'' (a'', b'', c'') s'éloigne indéfiniment;

2° pour les fonctions à un seul groupe de périodes (a, b, c), que les deux points A' (a', b', c') et A'' (a'', b'', c'') s'éloignent indéfiniment.

Mais il importe de remarquer que ces fonctions à un ou deux groupes de périodes peuvent n'avoir aucun point singulier à distance finie. Ainsi, par exemple, la fonction

$$\varphi(x,\ y,\ z) = e^{n(x\cos\alpha + y\sin\alpha)}\cos nz$$

où n est entier admet le groupe de périodes $(0,\ 0,\ 2\pi)$, vérifie l'équation $\Delta\varphi = 0$ et est régulière en tous les points à distance finie. De même la fonction

$$\psi(x,\ y,\ z) = e^{z\sqrt{m^2+n^2}}\cos mx \cos ny,$$

où m et n sont entiers, admet les deux groupes de périodes $(2\pi,\ 0,\ 0)$ et $(0,\ 2\pi,\ 0)$, vérifie l'équation $\Delta\psi = 0$ et est régulière en tous les points à distance finie.

BEWEIS DES LAURENT'SCHEN SATZES

VON

LUDWIG SCHEEFFER

in BERLIN.

Als Ergänzung zu den Theoremen des Herrn Mittag-Leffler über die Darstellung analytischer Funktionen hat der Laurent'sche Satz neuerdings grosse Bedeutung gewonnen. Es dürfte daher der folgende Beweis desselben von Interesse sein, welcher lediglich auf den elementaren Principien des Herrn Weierstrass beruht, während die früheren Beweise, soweit sie uns bekannt sind, sämmtlich von Riemann's partieller Differentialgleichung oder Cauchy's Integralsatz Gebrauch machen.

Wir formuliren den Satz folgendermassen:

Wenn eine Funktion der complexen Veränderlichen y innerhalb eines ringförmigen, von zwei concentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkte a eingeschlossenen Gebietes eindeutig ist und sich in der Umgebung jedes im Gebiete gelegenen Punktes y_0 nach positiven Potenzen von $y - y_0$ entwickeln lässt, so wird sie in dem ganzen ringförmigen Gebiet durch eine nach positiven und negativen Potenzen von $y - a$ fortschreitende Potenzreihe dargestellt.

Wir beweisen den Satz in § 1 zunächst für einen speciellen Fall. In § 2 wird dann gezeigt, wie sich der allgemeinste Fall auf jenen speciellen zurückführen lässt.

I.

Die Funktion $f(y)$ habe innerhalb eines ringförmigen, von zwei concentrischen Kreisen mit den Radien r und r_1 und dem Mittelpunkte o eingeschlossenen Gebietes G folgende Eigenschaften: sie sei eindeutig, ungerade und überall von dem Charakter einer ganzen Funktion. Ist dann $rr_1 = 1$ und $r > 1 + \sqrt{2}$, so kann $f(y)$ innerhalb des Gebietes G auf folgende Art in eine nach positiven und negativen Potenzen von y fortschreitende Reihe entwickelt werden.

Die Funktion

$$\varphi(z) = f(y) + f(y'),$$

in welcher y und y' die Wurzeln der Gleichung $y + \frac{1}{y} = z$ sind, ist offenbar eine eindeutige Funktion von z innerhalb eines um den Punkt o mit dem Radius $\rho = r - \frac{1}{r}$ beschriebenen Kreises; denn jedem Werthe von z innerhalb dieses Kreises entsprechen nur Werthe von y, die im Gebiete G liegen.

Die Funktion $\varphi(z)$ hat ferner in jedem Punkte z_0, welcher innerhalb des genannten Kreises liegt, den Charakter einer ganzen Funktion. Dies ist ohne Weiteres klar für alle von ± 2 verschiedenen Werthe von z_0; denn in der Umgebung jedes derartigen Punktes können $y - y_0$ und $y' - y'_0$, also auch $f(y)$ und $f(y')$ nach positiven Potenzen von $z - z_0$ entwickelt werden. Ist dagegen $z_0 = \pm 2$, so wird $y_0 = y'_0 = \pm 1$, und die Entwickelung von $y - y_0$ und $y' - y'_0$ nach Potenzen von $z - z_0$ ist unmöglich. Es wird aber in diesem Falle für jede positive ganze Zahl n

$$(y - y_0)^n + (y' - y'_0)^n$$

eine ganze rationale Funktion von $z - z_0$, und da die Entwickelungen von $f(y)$ und von $f(y')$ nach Potenzen von $y - y_0$ resp. $y' - y'_0$ entsprechend gleiche Coëfficienten haben, ist eine Entwickelung von $\varphi(z)$ nach Potenzen von $z - z_0$ auch hier nachgewiesen.

Die Funktion $\varphi(z)$ hat also innerhalb des Kreises ρ überall den Charakter einer ganzen Funktion und lässt sich dementsprechend durch eine nach positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe darstellen, welche für alle Werthe von z, deren absoluter Betrag kleiner als ρ, d. h. als $r - \frac{1}{r}$, ist, convergirt. Mit anderen Worten: die Funktion $f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ lässt sich durch eine nach positiven Potenzen von $y + \frac{1}{y}$ fortschreitende Reihe darstellen, so lange $\left| y + \frac{1}{y} \right|$ kleiner als $r - \frac{1}{r}$ ist.

Aus dieser Reihe entsteht nun eine nach positiven und negativen Potenzen von y fortschreitende Reihe, wenn alle Potenzen von $y + \frac{1}{y}$ nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt und die Coëfficienten gleicher Potenzen von y zusammengezogen werden. Die neue Reihe convergirt jedenfalls für alle Werthe y, welche der Bedingung

$$|y| + \left|\frac{1}{y}\right| < r - \frac{1}{r}$$

genügen, d. h. für alle Werthe, welche innerhalb eines von zwei Kreisen r' und $\frac{1}{r'}$ begrenzten Ringes liegen. r' wird durch die Gleichung

$$r' + \frac{1}{r'} = r - \frac{1}{r}$$

bestimmt, welche durch einen positiven Werth von r' erfüllbar ist, da $r > 1 + \sqrt{2}$ angenommen war.

Nachdem hiermit die Existenz einer Doppelreihe nachgewiesen ist, durch welche die Funktion $f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ innerhalb des von den Kreisen r' und $\frac{1}{r'}$ begrenzten Ringes dargestellt wird, folgt durch Anwendung bekannter Sätze ohne Weiteres, dass diese Darstellung im ganzen Gebiete G gültig bleibt.

Ganz ebenso ist nun zu zeigen, dass die Funktion $\psi(z') = f(y) + f(y')$, in welcher y und y' die Wurzeln der Gleichung $y - \frac{1}{y} = z'$ sind, eine eindeutige Funktion von z' ist, die in eine gewöhnliche, für $|z'| < r - \frac{1}{r}$

convergirende Potenzreihe entwickelt werden kann. Man erhält durch ähnliche Betrachtungen, wie die eben angestellten, schliesslich eine Entwickelung der Funktion $f(y) + f\left(-\frac{1}{y}\right)$ nach positiven und negativen Potenzen von y innerhalb des Gebietes G.

Da $f(y)$ ungerade angenommen war, ist

$$f(y) = \frac{1}{2}\left[f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[f(y) + f\left(-\frac{1}{y}\right)\right].$$

Werden für die beiden Glieder auf der rechten Seite die Doppelreihen eingeführt, so erhalten wir eine gleichartige Reihe für $f(y)$. W. z. b. w.

2.

Wir befreien nun den Satz von den Beschränkungen, welche wir ihm in der vorhergehenden Nummer auferlegt haben.

Dass $f(y)$ ungerade angenommen wurde, beeinträchtigt offenbar die Allgemeinheit nicht, da bekanntlich jede Funktion auf die Form

$$f_1(y) + yf_2(y)$$

gebracht werden kann, wo $f_1(y)$ und $f_2(y)$ ungerade Funktionen sind. Auch die Bedingung, dass rr_1 gleich 1 sein sollte, enthält keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit. Denn wenn wir die beiden Radien r und r_1 endlich und von Null verschieden annehmen, wird jene Bedingung nach Einführung der Substitution $y = \sqrt{rr_1}\,.\,x$ immer erfüllt sein. Ist aber einer der Radien r und r_1 gleich Null oder unendlich gross, so wird man zunächst das Gebiet der Veränderlichen dadurch beschränken, dass man beide Radien von Null verschieden und endlich annimmt. Ist dann für dieses Gebiet die Reihenentwickelung nachgewiesen, so folgt aus bekannten Sätzen unmittelbar die Gültigkeit derselben im ganzen ursprünglichen Gebiete.

Hiermit hat der Beweis bereits denjenigen Grad der Allgemeinheit erreicht, dessen er als Ergänzung zu den Theoremen des Herrn Mittag-Leffler bedarf. Er ist jetzt nämlich für alle diejenigen Fälle erbracht, wo der Quotient der Radien r und r_1 grösser als $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ist, speciell also auch für den Fall, dass der kleinere Radius gleich Null ist.

Wir können aber auch den Fall, wo der Quotient der Radien r und r_1 einen Werth zwischen $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ und 1 hat, auf den vorhergehenden zurückführen. Es existirt nämlich in diesem Falle offenbar immer eine ganze positive Potenz des Quotienten, welche grösser als $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ist. Ist n die Ordnungszahl dieser Potenz, so setzen wir:

$$y^n = x.$$

Bedeutet dann α eine primitive Wurzel der Gleichung

$$\alpha^n = 1,$$

und definiren wir f_μ folgendermassen

$$nf_\mu = \sum_{\lambda=0}^{n-1} (\alpha^\lambda y)^\mu f(\alpha^\lambda y),$$

so sind die n Grössen $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ offenbar eindeutige Funktionen von x in einem ringförmigen Gebiete dieser Variabeln von der Beschaffenheit, dass der Quotient der beiden charakteristischen Radien grösser als $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ist. Jene n Funktionen können in der Umgebung jeder im Gebiete gelegenen Stelle x_0 nach positiven Potenzen von $x - x_0$ entwickelt werden, da jeder der n Bestandtheile einer Funktion f_μ nach Potenzen von $y - y_0$, und $y - y_0$ wiederum nach Potenzen von $x - x_0$ zu entwickeln ist. Demnach lässt sich jede der Funktionen $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ durch eine nach positiven und negativen Potenzen von x fortschreitende Doppelreihe darstellen. Setzen wir statt x wieder y^n, so erhalten wir für die Funktionen f_μ Reihen, die nach positiven und negativen Potenzen von y fortschreiten.

Da nun

$$f(y) = \sum_{\mu=0}^{n-1} y^{-\mu} f_\mu$$

ist, ergiebt sich schliesslich ein Ausdruck für die Funktion $f(y)$ in Form einer nach positiven und negativen Potenzen fortschreitenden Reihe, welche für alle Werthe von y convergirt, deren absoluter Betrag zwischen r r_1 liegt.

Hiermit ist der LAURENT'sche Satz vollständig bewiesen.

Berlin, November 1883.

DE LA PUISSANCE DES ENSEMBLES PARFAITS DE POINTS.

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur

PAR

G. CANTOR

à HALLE.

... Quant à mon théorème, qui exprime, que les ensembles *parfaits* de points ont tous la même puissance, savoir la puissance du *continu,* je prétends le démontrer, en me bornant d'abord aux ensembles parfaits linéaires, (¹) comme il suit. Soit S un ensemble parfait de points quelconque, *qui n'est condensé dans l'étendue d'aucun intervalle,* si petit qu'il soit; nous admettons, que S est contenu dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, dont les points extrêmes 0 et 1 appartiennent a S; il est évident que tous les autres cas, dans lesquels l'ensemble parfait n'est condensé dans l'étendue d'aucun intervalle, peuvent par projection être réduits à celui-ci.

Or, il existe d'après mes considérations dans Acta mathematica T. 2 pag. 378 un nombre infini d'intervalles distincts, tout à fait séparés l'un de l'autre, que nous nous représentons rangés suivant leur grandeurs,

---

(¹) M. I. BENDIXSON invité par M. CANTOR à essayer de prouver ce même théorème, en a communiqué une démonstration à la séance du séminaire de l'université de Stockholm, le 21 Novembre 1883. Cette démonstration, qui a été trouvée sans que l'auteur ait eu connaissance des recherches que M. CANTOR veut bien me permettre de publier ici, a été présentée à l'Académie royale des sciences de Stockholm, le 12 Décembre 1883. Elle se trouve dans Bihang till Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar. La démonstration de M. BENDIXSON embrasse le cas d'un ensemble parfait de n dimensions.
L'éditeur.

de sorte que les intervalles plus petits viennent après les plus grands; nous les désignons, dans cet ordre, par:

(1) $$(a_1 \ldots b_1),\ (a_2 \ldots b_2),\ \ldots,\ (a_\nu \ldots b_\nu),\ \ldots;$$

ils sont par rapport à l'ensemble S tels que dans l'intérieur de chacun ne tombe aucun point de S, tandis que leurs points extrêmes a_ν et b_ν en concurrence avec les autres points-limites de l'ensemble de points $\{a_\nu, b_\nu\}$ appartiennent à S et le déterminent; nous désignons par g l'un quelconque de ces autres points-limites de $\{a_\nu, b_\nu\}$, par $\{g\}$ leur ensemble; nous avons:

(2) $$S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{g\}.$$

En outre la série (1) d'intervalles est telle que l'espace entre deux d'entre eux $(a_\nu \ldots b_\nu)$ et $(a_\mu \ldots b_\mu)$ en contient toujours une infinité d'autres et que de plus, $(a_\rho \ldots b_\rho)$ étant un quelconque de ces intervalles, il y en a d'autres de la même série (1) qui se rapprochent infiniment soit du point a_ρ, soit du point b_ρ; car a_ρ et b_ρ, comme appartenant comme *points* à l'ensemble parfait S, en sont aussi des *points-limites*.

Cela établi, je prends un ensemble de la première puissance quelconque:

(3) $$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_\nu,\ \ldots,$$

ensemble de points distincts et placés tous dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, *dans toute l'étendue duquel ils sont condensés;* seulement je suppose que ces points extrêmes 0 et 1 ne se trouvent pas entre les φ_ν.

Pour citer un exemple d'un ensemble tel qu'il nous le faut ici, je rappelle la forme de série, où j'ai mis l'ensemble de tous les nombres rationnels ≥ 0 et ≤ 1 dans Acta mathematica T. 2 pag. 319 et où pour notre but il faut supprimer seulement les deux premiers termes, qui y sont 0 et 1.

Mais je tiens à ce que la série (3) soit laissée dans toute sa généralité.

Voici maintenant ce que j'avance: *l'ensemble de points* $\{\varphi_\nu\}$ *et l'ensemble d'intervalles* $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ *peuvent être associés avec un sens unique l'un à l'autre de sorte que,* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *et* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *étant deux intervalles quelconques appartenant à la série* (1), *puis* φ_{k_ν} *et* φ_{k_μ} *étant les points correspondants de la série* (3), *on a toujours le nombre* φ_{k_ν} *plus petit ou plus grand que*

φ_{k_μ} *selon que dans le segment* (0 ... 1) *l'intervalle* $(a_\nu \ldots b_\nu)$ *est placé avant l'intervalle* $(a_\mu \ldots b_\mu)$ *ou après lui.* [1]

Une telle correspondance des deux ensembles $\{\varphi_\nu\}$ et $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ se peut faire par exemple d'après la règle suivante:

Nous associons à l'intervalle $(a_1 \ldots b_1)$ le point φ_1, à l'intervalle $(a_2 \ldots b_2)$ le terme au plus petit indice de la série (3), nous le désignons par φ_{k_2}, qui a la même relation par rapport au plus ou moins avec φ_1, que l'intervalle $(a_2 \ldots b_2)$ avec $(a_1 \ldots b_1)$ par rapport à leur placement dans le segment (0 ... 1); de plus nous associons à l'intervalle $(a_3 \ldots b_3)$ le terme au plus petit indice, qui a la même relation par rapport au plus ou moins avec φ_1 et avec φ_2, que l'intervalle $(a_3 \ldots b_3)$ avec les intervalles $(a_1 \ldots b_1)$ et $(a_2 \ldots b_2)$ respectivement par rapport à leur placement dans le segment (0 ... 1).

Généralement nous associons à l'intervalle $(a_\nu \ldots b_\nu)$ le terme au plus petit indice de la série (3), nous le nommerons φ_{k_ν}, tel, qu'il a la même relation par rapport au plus ou moins avec tous les points $\varphi_1, \varphi_{k_2}, \ldots, \varphi_{k_{\nu-1}}$ dont il a été déjà disposé, que l'intervalle $(a_\nu \ldots b_\nu)$ avec les intervalles correspondants $(a_1 \ldots b_1)$, $(a_2 \ldots b_2)$, ..., $(a_{\nu-1} \ldots b_{\nu-1})$ par rapport à leur placement dans le segment (0 ... 1).

J'avance, que d'après cette règle *les points* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ *de la suite* (3) *seront successivement, quoique selon un ordre différent de la loi de la série* (3), *associés* **tous** *à des intervalles distincts de la série* (1); car à chaque relation par rapport au plus ou moins entre des points en nombre fini de la série (3) il se trouve plusieurs fois une rélation conforme par rapport à la place dans le segment (0 ... 1) entre des intervalles en même nombre de la série (1); cela tient à ce que l'ensemble S est un ensemble parfait qui n'est condensé dans aucun intervalle, quelque petit qu'il soit.

Pour simplifier nous poserons:

$$\varphi_1 = \psi_1; \quad \varphi_{k_2} = \psi_2; \quad \ldots; \quad \varphi_{k_\nu} = \psi_\nu; \quad \ldots$$

Par conséquent la série suivante:

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots \tag{4}$$

---

[1] Il ne s'agit donc pas ici de la place ν et μ qu'occupent ces intervalles dans la série (1).

se compose absolument des mêmes éléments que la série (3); *les deux séries* (3) *et* (4) *ne diffèrent que par rapport à la succession de leurs termes.*

La série (4) de points ψ_ν a donc ce rapport remarquable avec la série (1) d'intervalles, que toutes les fois que ψ_ν est plus petit ou plus grand que ψ_μ, aussi a_ν et b_ν sont respectivement plus petits ou plus grands que a_μ et b_μ. Et je rappelle de nouveau que l'ensemble $\{\psi_\nu\}$, puisqu'il coïncide avec l'ensemble donné $\{\varphi_\nu\}$, à part la succession des termes, est condensé dans toute l'étendue du segment $(0 \ldots 1)$ et que les points extrêmes de celui-ci, 0 et 1, n'appartiennent pas à cet ensemble.

Les conséquences d'une telle association des deux ensembles $\{\psi_\nu\}$ et $\{(a_\nu \ldots b_\nu)\}$ sont maintenant, comme il est *facile* de le démontrer, les suivantes:

Si $(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1})$, $(a_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_2})$, $\ldots$, $(a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu})$, $\ldots$ *est une série quelconque d'intervalles appartenants à la série* (1), *qui convergent infiniment soit vers le point* a_ρ, *soit vers le point* b_ρ, *alors la série correspondante de points* ψ_{λ_1}, ψ_{λ_2}, $\ldots$, ψ_{λ_ν}, $\ldots$, *appartenants tous à la série* (4), *converge infiniment vers le point* ψ_ρ, *et réciproquement.*

Si $(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1})$, $(a_{\lambda_2} \ldots b_{\lambda_2})$, $\ldots$, $(a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu})$, $\ldots$ *est une série quelconque de la même espèce, mais telle, que ses termes convergent infiniment vers un point* g *de l'ensemble* S *(voir la formule* (2) *et la signification de* g), *alors la série correspondante* ψ_{λ_1}, ψ_{λ_2}, $\ldots$, ψ_{λ_ν}, $\ldots$ *à son tour converge infiniment vers un point déterminé du segment* $(0 \ldots 1)$, *qui ne coïncide avec aucun point de la série* (3) *ou* (4) *et qui de plus est entièrement déterminé par* g; *nous désignerons ce point correspondant à* g *par* h; *réciproquement soit* h *un point quelconque du segment* $(0 \ldots 1)$, *qui n'appartient pas à la série* (3) *ou* (4) *il détermine un point* g *de l'ensemble* S *différent des points* a_ν *et* b_ν; *en sorte que les deux nombres variables* g *et* h *sont des fonctions à sens unique l'une de l'autre et que les ensembles* $\{g\}$ *et* $\{h\}$ *par suite sont certainement de la même puissance.*

De là suit la démonstration du théorème en question.

Car nous avons d'après la formule (2):

$$S \equiv \{a_\nu\} + \{b_\nu\} + \{g\}.$$

Puis il est évident que:

$$(0 \ldots 1) \equiv \{\varphi_{2\nu}\} + \{\varphi_{2\nu-1}\} + \{h\}.$$

Mais comme on a les formules suivantes:

$$\{a_\nu\} \sim \{\varphi_{2\nu}\}; \ \{b_\nu\} \sim \{\varphi_{2\nu-1}\} \ \text{et} \ \{g\} \sim \{h\}$$

on conclut d'après le théorème (E) des Acta Mathematica T. 2 p. 318 la formule:

$$S \sim (0 \ldots 1)$$

c'est à dire l'ensemble parfait S a la même puissance que le segment continu $(0 \ldots 1)$; ce qui était à démontrer.

... Cette démonstration a l'avantage de nous dévoiler une grande classe remarquable de fonctions *continues* d'une variable réelle x, dont les propriétés donnent lieu à des recherches intéressantes, soit en les considérant d'après la définition, qui se rattache à notre développement, *soit en tâchant de les mettre sous la forme de séries trigonométriques, qui certainement leur sont conformes, parce que ces fonctions continues ne jouissent pas d'un nombre infini de maxima et minima.*

En effet nous pouvons établir dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ une fonction $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

Lorsque x est compris dans l'un quelconque des intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$ c'est à dire pour $a_\nu \leq x \leq b_\nu$ $\psi(x)$ est égale à ψ_ν; lorsque x reçoit une valeur g qui s'obtient comme limite d'une série d'intervalles $(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1})$, ..., $(a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu})$, ... alors on définit:

$$(5) \qquad \psi(g) = h = \lim_{\nu=\infty} \psi_{\lambda_\nu}.$$

Certe, la fonction $\psi(x)$, d'après ce que nous avons vu, *est une fonction continue, monotone*[1] *de la variable continue* x; *lorsque* x *croît de* 0 *à* 1, $\psi(x)$ *varie d'une manière continue sans diminuer de* 0 *à* 1; *son image*

---

[1] C'est une *expression* introduite par M. Ch. Neumann (voir *Ueber die nach Kreis-, Kugel- und Cylinder-functionen fortschreitenden Entwickelungen.* Leipzig 1881, p. 26).

géométrique se compose d'un ensemble scalariforme de segments droits, tous parallèles à l'axe des x et de certains points interposés, qui font, que cette courbe devient un continu. Un cas particulier de ces fonctions est déjà compris dans un exemple, que j'ai mentionné dans Acta mathematica T. 2, pag. 407. En posant:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_\rho}{3^\rho} + \cdots, \tag{6}$$

où les coefficients c_ν peuvent prendre à volonté les deux valeurs 0 et 2 et où la série peut être composée d'un nombre fini ou infini de membres, l'ensemble $\{z\}$ est un ensemble *parfait* S, situé dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, les points extrêmes 0 et 1 appartiennent à cet ensemble $\{z\}$; de plus l'ensemble $\{z\} = S$ est ici tel, qu'il n'est condensé dans l'étendue d'aucun intervalle, si petit qu'il soit; enfin on peut aussi s'assurer, que cet ensemble $S = \{z\}$ a une *grandeur* $\mathfrak{J}(S)$ (*notion* que j'expliquerai à l'instant) égale à zéro.

Ici les points, que nous avons désignés par b_ν résultent de la formule (6) pour z en prenant $c_\rho = 0$ à partir d'un certain ρ plus grand que 1, en sorte que tous les b_ν sont compris dans la formule:

$$b_\nu = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{2}{3^\mu}. \tag{7}$$

Les points a_ν résultent de la même formule pour z, en prenant c_ρ à partir d'un certain ρ toujours égal à 2, en sorte qu'en vertu de l'équation:

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots$$

on a, en prenant $c_\mu = 0$, $c_{\mu+1} = c_{\mu+2} = \cdots = 2$,

$$a_\nu = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots + \frac{c_{\mu-1}}{3^{\mu-1}} + \frac{1}{3^\mu}. \tag{8}$$

Joignons maintenant la variable z à une autre y, définie par la formule:

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_\rho}{2^\rho} + \cdots\right) \tag{9}$$

dans laquelle nous convenons, que les coefficients c_n ont la même valeur que dans (6).

Par cette liaison y devient évidemment une fonction de z, que nous appellons $\psi(z)$. Remarquons maintenant que les deux valeurs de $\psi(z)$ pour $z = a_\nu$ et pour $z = b_\nu$ deviennent égales, savoir:

$$\psi(a_\nu) = \psi(b_\nu) = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{2^1} + \frac{c_2}{2^2} + \ldots + \frac{c_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^n}\right).$$

De là resulte une fonction continue et monotone $\psi(x)$ de la variable continue x, définie de la manière suivante:

Pour $a_\nu < x < b_\nu$ on pose: $\psi(x) = \psi(a_\nu) = \psi(b_\nu)$, et pour $x = z$ on a $\psi(x) = y = \psi(z)$.

M. L. Scheeffer à Berlin a observé, que cette fonction $\psi(x)$, ainsi que beaucoup d'autres, est en contradiction avec un théorème de M. Harnack (v. Math. Annalen Bd. 19, pag. 241, Lehrs. 5). En effet cette fonction $\psi(x)$ a sa dérivée $\psi'(x)$ égale a zéro pour toutes les valeurs de x, à l'exception de ceux, que nous avons nommées z; celles-ci constituent un ensemble parfait $\{z\}$, dont la grandeur $\mathfrak{J}(\{z\})$ est égale à zéro. Mais M. Scheeffer m'a aussi dit, qu'il pouvait remplacer ce théorème par un autre, qui serait exempt de doute; j'espère qu'il publiera bientôt dans les Acta ses recherches sur ce sujet aussi bien que sur diverses autres questions intéressantes, dont il s'occupe.

. . . Dans ce qui précède j'ai démontré, que tous les ensembles parfaits et linéaires de points, qui ne sont condensés dans aucune partie du segment, dans lequel ils sont placés, si petite qu'elle soit, sont de la même puissance que le continu linéaire.

Prenons maintenant un ensemble parfait et linéaire de points S *quelconque,* placé dans l'intervalle $(-\omega \ldots +\omega)$ je dis qu'également cet ensemble S a la puissance du continu $(0 \ldots 1)$.

En effet, comme nous avons déjà traité le cas, où l'ensemble S n'est condensé dans aucune partie continue du segment $(-\omega \ldots +\omega)$, prenons

un intervalle quelconque $(c \ldots d)$, dans l'intérieur duquel S soit condensé partout. Tous les points de $(c \ldots d)$ appartiendront aussi à S, parce que S est un ensemble parfait.

L'ensemble de points $(c \ldots d)$ est un système partiel de S et S un système partiel du segment $(-\omega \ldots +\omega)$. Comme l'ensemble $(c \ldots d)$ a la même puissance que l'ensemble $(-\omega \ldots +\omega)$, on en conclut aussi, que S a la même puissance que $(-\omega \ldots +\omega)$, c'est à dire la puissance de $(0 \ldots 1)$; car on a le théorème général:

»*Étant donné un ensemble bien défini M d'une puissance quelconque, un ensemble partiel M' pris dans M et un ensemble partiel M'' pris dans M', si le dernier système M'' possède la même puissance que le premier M, l'ensemble moyen M' est aussi toujours de la même puissance que M et M''.*» (Voir Acta mathematica, T. 2, pag. 392).

Lorsqu'un ensemble P est tel, que son premier ensemble dérivé $P^{(1)}$ en est diviseur, je nomme P un *ensemble fermé.*

Chaque ensemble *fermé* P d'une puissance supérieure à la première se décompose, comme nous le savons, d'une seule manière en un ensemble R de la première puissance et en un ensemble parfait S. On en conclut au moyen des théorèmes obtenus, le suivant: »*Tous les ensembles fermés de points se divisent en deux classes, les uns sont de la première puissance, les autres ont la puissance du continu arithmétique.*» Dans une prochaine communication je montrerai que cette division en deux classes a aussi lieu pour les ensembles de points *non fermés.* Par là nous arriverons à l'aide des principes du § 13 de mon mémoire dans Acta mathematica T. 2, pag. 390, à la détermination de la *puissance* du *continu arithmétique,* en démontrant qu'elle coïncide avec celle de la *deuxième classe des nombres (II).*

... Il y a une *notion* de *volume* ou de *grandeur,* qui se rapporte à tout ensemble P, situé dans un espace plan G_n à n dimensions, que cet ensemble P soit continu ou non.

Dans le cas ou P se réduit à un ensemble continu à n dimensions, ou à un système de tels ensembles, cette notion se confond avec la notion ordinaire de volume.

Lorsque P est un continu à un nombre de dimensions plus petit que n la valeur du volume devient zéro; la même chose arrive lorsque P est tel que $P^{(1)}$ a la première puissance et encore dans divers autres cas. Mais ce qui, au premier moment, paraîtra peut être étonnant, c'est que ce volume, je le désigne par $\mathfrak{J}(P)$, a quelquefois une valeur différente de zéro pour des ensembles P contenus dans G_n de l'espèce de ceux, qui ne sont condensés dans aucune partie continue à n dimensions de G_n, si petite qu'elle soit.

J'arrive à cette notion générale de *volume* ou de *grandeur* $\mathfrak{J}(P)$ d'un ensemble *quelconque* P contenu dans G_n en prenant *chaque* point p, qui appartient à P ou à $P^{(1)}$, pour centre d'une sphère pleine à n dimensions au rayon ρ, que nous appellerons $K(p, \rho)$. Le plus petit multiple de tous ces sphères pleines $K(p, \rho)$ (voir la définition du plus petit multiple, Acta mathematica T. 2, pag. 357) savoir:

$$\mathfrak{M}[K(p, \rho)],$$

(où ρ est une constante) constitue pour chaque valeur de ρ un ensemble qui se compose de pièces continues à n dimensions et dont le volume se détermine d'après les règles connues au moyen d'une intégrale n-tiple.

Soit $f(\rho)$ la valeur de cette intégrale; $f(\rho)$ est une fonction continue de ρ, qui diminue avec ρ; la limite de $f(\rho)$, lorsque ρ converge vers zéro, me sert de définition du volume $\mathfrak{J}(P)$; en sorte, que nous avons:

$$\mathfrak{J}(P) = \lim_{\rho=0} f(\rho). \tag{10}$$

Je fais remarquer expressément que cette valeur du *volume* ou de la *grandeur* d'un ensemble quelconque P contenu dans un espace continu plan G_n à n dimensions est absolument dépendante de l'espace plan G_n même, duquel P est considéré comme une partie composante, et particulièrement du nombre n; de sorte que, si l'on considère *le même ensemble* P comme une partie constituante d'un autre espace continu plan H_m la valeur du volume de P par rapport à l'espace H_m est en général différente de celle, qui se rapporte au même ensemble P, considéré comme partie constitutive de G_n.

Un carré p. e. dont le côté est égal à l'unité, a sa *grandeur* égale à zéro lorsqu'il est considéré comme partie constituante de l'espace à trois

dimensions, mais il a la grandeur égale à 1, lorsqu'on le regarde comme partie d'un plan à deux dimensions. Cette notion générale de *volume* ou de *grandeur* m'est indispensable dans les recherches sur les *dimensions* des *ensembles continus*, que j'ai promises dans Acta mathematica T. 2, pag. 407 et que je vous enverrai plus tard pour votre journal.

En nous bornant ici aux ensembles *linéaires* de points, compris dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$, le *volume* ou la *grandeur* d'un tel ensemble P se détermine facilement en suivant la méthode exposée dans Acta mathematica T. 2, pag. 378, où nous avons considéré des intervalles, désignés par $(c_\nu \ldots d_\nu)$ et liés d'après une loi manifeste à P et $P^{(1)}$ ou, comme je l'ai exprimé là, à $\mathfrak{M}(P, P^{(1)})$. Nous y avons posé:

$$\sum (d_\nu - c_\nu) = \sigma$$

où σ est une quantité déterminée positive $\leqq 1$. Or dans notre cas on se convaincra facilement, que l'on a:

$$\mathfrak{J}(P) = 1 - \sigma. \tag{11}$$

... Les ensembles linéaires parfaits de points S, qui ne sont condensés dans aucun intervalle, si petit qu'il soit, ont en général une grandeur $\mathfrak{J}(S)$ différente de zéro, mais il peuvent aussi avoir une grandeur $\mathfrak{J}(S)$ égale à zéro.

Quant à ceux, pour lesquels $\mathfrak{J}(S)$ est différent de zéro, ils peuvent être réduits par composition (addition) et à ceux pour lesquels $\mathfrak{J}(S) = 0$ et à de tels ensembles parfaits, qui non seulement sont d'une grandeur différente de zéro, mais dont toutes les parties *parfaites*, que l'on obtient en se bornant à des intervalles partiels de $(0 \ldots 1)$, ont *à leur tour* une grandeur différente de zéro.

Pour *cette dernière classe* d'ensembles parfaits linéaires il y a une démonstration très simple du théorème démontré plus haut, que leur puissance est celle du continu.

En effet prenons un tel ensemble parfait S dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$ et supposons que les points extrêmes 0 et 1 appartiennent à S; nous établissons d'abord la série (1) d'intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$, appartenant dans le sens expliqué à l'ensemble parfait S.

Soit x une grandeur quelconque > 0 et $\leqq 1$, nous désignons par S_x l'ensemble, qui est constitué par tous les points de S, qui sont situés dans l'intervalle $(0 \ldots x)$ et définissons une fonction $\varphi(x)$ par les conditions suivantes:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(x) = \mathfrak{J}(S_x) \qquad \text{pour } x > 0 \text{ et } \leqq 1.$$

Cette fonction $\varphi(x)$ est, comme on le voit sans peine, continue et monotone dans l'intervalle $(0 \ldots 1)$; pour la valeur $x = 1$ elle prend la valeur $\varphi(1) = \mathfrak{J}(S) = c$, différente de zéro d'après l'hypothèse faite par rapport à S. De plus, dans chacun des intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$, c'est à dire pour $a_\nu \leqq x \leqq b_\nu$ elle conserve une valeur constante $\varphi(x) = \varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$; lorsque x est plus petit que a_ν on a toujours $\varphi(x) < \varphi(a_\nu)$, lorsque x est plus grand que b_ν on a $\varphi(x) > \varphi(b_\nu)$; *cela tient à ce* que nous avons supposé un ensemble S tel que tout ensemble partiel parfait, que l'on obtient en se bornant à des intervalles partiels de $(0 \ldots 1)$ est à son tour d'une *grandeur* différente de zéro.

La fonction continue $\varphi(x)$ prend toutes les valeurs entre 0 et c; elle prend chaque valeur entre celles qui sont égales à $\varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$ un nombre infini de fois, savoir pour tous les x, qui sont $\leqq a_\nu$ et $\leqq b_\nu$; mais elle ne prend *qu'une seule* fois chaque valeur h de l'intervalle $(0 \ldots c)$, qui est différente des valeurs $\varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$, pour une valeur *distincte* g de x, où g diffère de toutes les valeurs appartenant aux intervalles $(a_\nu \ldots b_\nu)$, soit des valeurs extrêmes a_ν et b_ν soit des intermédiares.

Et puisque à chacune de ces valeurs g de x il appartient une certaine valeur $h = \varphi(g)$, différente des valeurs $\varphi(a_\nu) = \varphi(b_\nu)$, et vice versa, on a comme dans notre première démonstration:

$$\{g\} \sim \{h\}$$

d'où l'on conclut comme plus haut, que la puissance de S est celle du continu $(0 \ldots c)$.

... Après avoir obtenu ces résultats je suis revenu à mes recherches sur les séries trigonométriques, que j'ai publiées il y a maintenant treize ans et que j'avais laissées de côté depuis longtemps; non seulement je suis parvenu à démontrer, que le théorème Acta mathematica T. 2 pag. 348 reste juste, lorsque le système de points, que j'y ai désigné par P, est tel, que son ensemble dérivé $P^{(1)}$ a la première puissance, mais je possède maintenant même quelques résultats pour le cas ou $P^{(1)}$ est d'une puissance plus grande que la première; je vous les enverrai une autre fois.

Halle, 15 Novembre 1883.

ÜBER DIE REDUCTION
EINER BESTIMMTEN KLASSE ABEL'SCHER INTEGRALE
3ten RANGES
AUF ELLIPTISCHE INTEGRALE(¹)

VON

SOPHIE KOWALEVSKI

in STOCKHOLM.

Einleitung.

ABEL hat in seinem *Précis des fonctions elliptiques* (Oeuvres complètes, Bd I, p. 350) das nachstehende Theorem bewiesen:

»Wenn sich überhaupt ein Integral von der Form

$$\int (y_1 dx_1 + \ldots + y_\mu dx_\mu)$$

wo $y_1, \ldots, y_\mu$ *algebraische* Functionen von $x_1, \ldots, x_\mu$ bedeuten, welche durch irgend eine Anzahl von algebraischen Gleichungen mit einander verbunden sind, — durch algebraische, logarithmische und elliptische Functionen ausdrücken lässt, so ist diese Reduction stets auf der folgenden Weise möglich:

$$\int (y_1 dx_1 + \ldots + y_\mu dx_\mu) = r + A_1 \log \rho^{(1)} + \ldots + A_k \log \rho^{(k)}$$

$$+ \alpha_1 \int \frac{F(s_1) ds_1}{\Delta_1(s_1)} + \ldots + \alpha_n \int \frac{F(s_n) ds_n}{\Delta_n(s_n)}$$

(¹) Diese Abhandlung ist von mir im Sommer 1874 der philosophischen Facultät der Universität Göttingen vorgelegt worden. Sie erscheint hier ganz unverändert.

wo $A_1, \ldots, A_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Constanten bedeuten; $F_\nu(s_\nu)$ eine rationale Function von s_ν; $\varDelta_\nu(s_\nu)$ die Quadratwurzel aus einer ganzen Function dritten oder vierten Grades von s_ν; $r, \rho^{(1)}, \ldots, \rho^{(k)}, s_1, \ldots, s_n, \varDelta_1(s_1), \ldots, \varDelta_n(s_n)$ *rational* aus $x_1, \ldots, x_\mu, y_1, \ldots, y_\mu$ zusammengesetzt sind.»

Als eine Folgerung von diesem Satz hat mir mein verehrter Lehrer, Herr WEIERSTRASS, den folgenden Satz mitgetheilt:

»Wenn y eine algebraische Function von x ist und es giebt unter den Integralen

$$\int F(x, y)\,dx$$

wo $F(x, y)$ eine beliebige rationale Function von x und y bedeutet, solche, die sich auf elliptische Integrale zurückführen lassen, *so ist diese Reduction auch stets für ein Integral erster Gattung möglich.*

Denn da s_μ, $\varDelta_\mu(s_\mu)$ rational durch x und y ausdrückbar sind, so geht

$$\int \frac{ds_\mu}{\varDelta_\mu(s_\mu)} \quad \text{in} \quad \int H(x, y)\,dx$$

über, wo $H(x, y)$ eine rationale Function von x, y bedeutet, und da $\int \frac{ds_\mu}{\varDelta_\mu(s_\mu)}$ ein Integral erster Gattung ist, so muss das transformirte, $\int H(x, y)\,dx$ auch ein solches sein.

Hierdurch ist die Untersuchung über die Reduction ABEL'scher Integrale höheren Ranges auf elliptische Integrale hauptsächlich auf die Beantwortung folgender Frage zurückgeführt:

»Es bestehe zwischen zwei Veränderlichen x, y eine algebraische Gleichung ρ^{ten} Ranges,[1] so dass es, wenn y als Function von x betrachtet wird, unter den Integralen $\int F(x, y)\,dx$ ρ linear von einander unabhängige $(u_1, u_2, \ldots, u_\rho)$ giebt, durch welche sich jedes Integral erster Gattung u in der Form

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + \ldots + c_\rho u_\rho$$

[1] Die Zahl ρ ist dieselbe, welche RIEMANN mit p bezeichnet.

wo $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ Constanten bedeuten, ausdrücken lässt; es fragt sich, welche besondere Beschaffenheit die Gleichung zwischen x und y haben muss, d. h. welche Relationen unter ihren Constanten stattfinden müssen, wenn es möglich sein soll, die Grössen c so zu bestimmen, dass sich u in ein elliptisches Integral

$$\int \frac{ds}{\varDelta(s)}$$

verwandeln lässt, und zwar so, dass s und $\varDelta(s)$ rational durch x, y ausdrückbar sind.»

Herr Weierstrass hat die fragliche Relation zunächst in *transcendenter Form* folgendermassen dargestellt.

Man kann bekanntlich die Integrale $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ so wählen, dass dieselben 2ρ primitive Perioden-Systeme von der Gestalt:

$$\begin{array}{l} 1, 0, 0, \ldots, 0, \tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{1\rho} \\ 0, 1, 0, \ldots, 0, \tau_{21}, \tau_{22}, \ldots, \tau_{2\rho} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, 0, 0, \ldots, 1, \tau_{\rho 1}, \tau_{\rho 2}, \ldots, \tau_{\rho\rho} \end{array}$$

besitzen, wo unter den $\tau_{\alpha\beta}$ die Relation

$$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

besteht. Dann hat das Integral u folgende 2ρ primitive Perioden

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_\rho,\ \sum_1^\rho {}_\alpha c_\alpha \tau_{\alpha,1},\ \sum_1^\rho {}_\alpha c_\alpha \tau_{\alpha,2},\ \ldots,\ \sum_1^\rho {}_\alpha c_\alpha \tau_{\alpha,\rho}.$$

Jeder derselben entspricht nun, wenn sich u in der angegebenen Weise in ein elliptisches Integral verwandeln lässt, eine Periode des letzteren, so dass man

$$\begin{array}{l} c_1 = 2n_1\omega + 2n_1'\omega' \\ c_2 = 2n_2\omega + 2n_2'\omega' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_\rho = 2n_\rho\omega + 2n_\rho'\omega' \end{array}$$

$$c_1\tau_{11} + c_2\tau_{21} + \ldots + c_\rho\tau_{\rho 1} = -2(m_1\omega + m_1'\omega')$$
$$c_1\tau_{12} + c_2\tau_{22} + \ldots + c_\rho\tau_{\rho 2} = -2(m_2\omega + m_2'\omega')$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$c_1\tau_{1\rho} + c_2\tau_{2\rho} + \ldots + c_\rho\tau_{\rho\rho} = -2(m_\rho\omega + m_\rho'\omega')$$

hat, wo die n, n', m, m' sämmtlich ganze (positive oder negative) Zahlen bezeichnen und $(2\omega, 2\omega')$ ein primitives Periodenpaar des elliptischen Integrals ist. Setzt man in die ρ letzte Gleichungen $c_1, \ldots, c_\rho$ aus den ρ ersten, so ergiebt sich:

$$0 = (m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{21} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho 1})\omega + (m_1' + n_1'\tau_{11} + n_2'\tau_{21} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho 1})\omega'$$
$$0 = (m_2 + n_1\tau_{12} + n_2\tau_{22} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho 2})\omega + (m_2' + n_1'\tau_{12} + n_2'\tau_{22} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho 2})\omega'$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$0 = (m_\rho + n_1\tau_{1\rho} + n_2\tau_{2\rho} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho\rho})\omega + (m_\rho' + n_1'\tau_{1\rho} + n_2'\tau_{2\rho} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho\rho})\omega'$$

woraus sich unter den Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ die $(\rho - 1)$ Relationen

$$(1)\qquad \frac{m_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{21} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho 1}}{m_1' + n_1'\tau_{11} + n_2'\tau_{21} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho 1}} = \frac{m_2 + n_1\tau_{12} + n_2\tau_{22} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho 2}}{m_2' + n_1'\tau_{12} + n_2'\tau_{22} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho 2}} = \ldots$$
$$\ldots = \frac{m_\rho + n_1\tau_{1\rho} + n_2\tau_{2\rho} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho\rho}}{m_\rho' + n_1'\tau_{1\rho} + n_2'\tau_{2\rho} + \ldots + n_\rho'\tau_{\rho\rho}}$$

ergeben.

Man darf dann, wie mir Herr Weierstrass ebenfalls gezeigt hat, von den Zahlen m, n, m', n' voraussetzen, dass

$$m_1 n_1' + m_2 n_2' + \ldots + m_\rho n_\rho' - m_1' n_1 - m_2' n_2 - \ldots - m_\rho' n_\rho$$

eine *ganze* und *positive* Zahl ist, die mit k bezeichnet werde und kann dann ein System von $4\rho(\rho - 1)$ ganze Zahlen

$$m_{12},\ m_{22},\ \ldots,\ m_{\rho 2},\ n_{12},\ n_{22},\ \ldots,\ n_{\rho 2}$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$m_{1\rho},\ m_{2\rho},\ \ldots,\ m_{\rho\rho},\ n_{1\rho},\ n_{2\rho},\ \ldots,\ n_{\rho\rho}$$
$$m_{12}',\ m_{22}',\ \ldots,\ m_{\rho 2}',\ n_{12}',\ n_{22}',\ \ldots,\ n_{\rho 2}'$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$m_{1\rho}',\ m_{2\rho}',\ \ldots,\ m_{\rho\rho}',\ n_{1\rho}',\ n_{2\rho}',\ \ldots,\ n_{\rho\rho}'$$

so bestimmen, dass dieselben die Relationen

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{1}^{\rho}{}_{\alpha}(m_\alpha m'_{\beta\alpha} - m'_\alpha m_{\beta\alpha}) = 0\\
&\sum_{1}^{\rho}{}_{\alpha}(n_\alpha n'_{\beta\alpha} - n'_\alpha n_{\beta\alpha}) = 0\\
&\sum_{1}^{\rho}{}_{\alpha}(m_\alpha n'_{\beta\alpha} - n_\alpha m'_{\beta\alpha}) = 0\\
&\sum_{1}^{\rho}{}_{\alpha}(m_{\alpha\beta} n_{\alpha\gamma} - m_{\alpha\gamma} n_{\alpha\beta}) = 0 \qquad \begin{pmatrix}\beta=1,\ldots,\rho\\ \gamma=1,\ldots,\rho\end{pmatrix}\\
&\sum_{1}^{\rho}{}_{\alpha}(m'_{\alpha\beta} n'_{\alpha\gamma} - m'_{\alpha\gamma} n'_{\alpha\beta}) = 0\\
&\sum_{1}^{\rho}{}_{\alpha}(m_{\alpha\beta} n'_{\alpha\gamma} - m'_{\alpha\gamma} n_{\alpha\beta}) = \begin{cases} 0 & (\beta \gtrless \gamma)\\ k & (\beta = \gamma)\end{cases}
\end{aligned}
$$

stattfinden. Setzt man dann

$$
\begin{aligned}
\omega_{11} &= m_1 + n_1\tau_{11} + \ldots + n_\rho\tau_{1\rho}, \;\ldots,\; \omega_{\rho 1} = m_\rho + n_1\tau_{\rho 1} + \ldots + n_\rho\tau_{\rho\rho}\\
\omega_{12} &= m_{12} + n_{12}\tau_{11} + \ldots + n_{\rho 2}\tau_{1\rho}, \;\ldots,\; \omega_{\rho 2} = m_{\rho 2} + n_{12}\tau_{\rho 1} + \ldots + n_{\rho 2}\tau_{\rho\rho}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_{1\rho} &= m_{1\rho} + n_{1\rho}\tau_{11} + \ldots + n_{\rho\rho}\tau_{1\rho}, \;\ldots,\; \omega_{\rho\rho} = m_{\rho\rho} + n_{1\rho}\tau_{\rho 1} + \ldots + n_{\rho\rho}\tau_{\rho\rho}\\[1ex]
\omega'_{11} &= m'_1 + n'_1\tau_{11} + \ldots + n'_\rho\tau_{1\rho}, \;\ldots,\; \omega'_{\rho 1} = m'_\rho + n'_1\tau_{\rho 1} + \ldots + n'_\rho\tau_{\rho\rho}\\
\omega'_{12} &= m'_{12} + n'_{12}\tau_{11} + \ldots + n'_{\rho 2}\tau_{1\rho}, \;\ldots,\; \omega'_{\rho 2} = m'_{\rho 2} + n'_{12}\tau_{\rho 1} + \ldots + n'_{\rho 2}\tau_{\rho\rho}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega'_{1\rho} &= m'_{1\rho} + n'_{1\rho}\tau_{11} + \ldots + n'_{\rho\rho}\tau_{1\rho}, \;\ldots,\; \omega'_{\rho\rho} = m'_{\rho\rho} + n'_{1\rho}\tau_{\rho 1} + \ldots + n'_{\rho\rho}\tau_{\rho\rho}
\end{aligned}
$$

so bestehen unter den Grössen $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$ die Relationen

$$
(3)\qquad \sum_{1}^{\rho}{}_{\gamma}(\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}) = 0. \qquad \begin{pmatrix}\alpha=1,\ldots,\rho\\ \beta=1,\ldots,\rho\end{pmatrix}
$$

Wenn man daher, unter $v_1, \ldots, v_\rho$ unabhängige Veränderliche verstehend,

$$v'_\alpha = \frac{(\omega)_{1\alpha} v_1 + \ldots + (\omega)_{\rho\alpha} v_\rho}{(\omega)}, \qquad (\alpha = 1, \ldots, \rho)$$

setzt, so kann man eine Function

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})$$

bilden, welche dann eine Transformation der Function

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$$

ist. (Zum vollständigen Beweise muss gezeigt werden, dass die Grössen $\tau'_{\alpha\gamma}$ auch denjenigen Bedingungen genügen, welche für die Convergenz der Reihe, durch welche

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})$$

dargestellt wird, erforderlich sind.)

Die Relationen

$$\frac{\omega'_{11}}{\omega_{11}} = \frac{\omega'_{21}}{\omega_{21}} = \ldots = \frac{\omega'_{\rho 1}}{\omega_{\rho 1}}$$

besagen nun, dass

$$\tau_{12} = \tau_{13} = \ldots = \tau_{1\rho} = 0$$

und es lässt sich also

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})$$

als ein Product einer ϑ-Function von $(\rho - 1)$ Veränderlichen und einer elliptischen ϑ

$$\vartheta(v'_1 \mid \tau'_{11})$$

ausdrücken; und wenn dies der Fall ist, so kann das Integral

$$\sum_1^\rho{}_\alpha \frac{1}{(\omega)} (\omega)_{1\alpha} u_\alpha$$

auch stets in der verlangten Weise in ein elliptisches verwandelt werden.

Dieses ist der Satz dessen (für den Fall $\rho = 2$) Herr Königsberger in der Abhandlung: *Über die Transformation des zweiten Grades für die*

Abel'sche Functionen der ersten Ordnung (BORCHARDT's Journal, B. 67, S. 71) als eines ihm brieflich von Herrn WEIERSTRASS mitgetheilen, erwähnt.

Hiermit ist die Aufgabe um die es sich handelt, mit der Transformations-Theorie der ϑ-Functionen in Verbindung gebracht. Wenn nämlich die Function

$$\vartheta(v'_1, \ldots v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})$$

sich als Product aus einer ϑ-Function von $(\rho - 1)$ Veränderlichen und einer elliptischen darstellen lässt, so gilt dasselbe auch für die übrigen Functionen

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})_\lambda$$

welche aus jener entspringen. (1)

Daraus folgt, dass unter den Grössen

$$\vartheta(0, \ldots, 0 \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})_\lambda$$

Relationen bestehen müssen, welche die Bedingungen für die Möglichkeit der in Rede stehenden Zerlegbarkeit der Function aussprechen. Namentlich ergiebt sich, dass unter den *graden* Functionen

$$\vartheta(v'_1, \ldots, v'_\rho \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})_\lambda$$

es eine gewisse Anzahl solcher giebt, welche für $v'_1 = v'_2 = \ldots = v'_\rho = 0$ verschwinden. Nun aber hängen die Grössen $\vartheta(0, \ldots, 0 \mid \tau'_{11}, \ldots, \tau'_{\rho\rho})$ mit den $\vartheta(0, \ldots, 0 \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$ algebraisch zusammen; die Quotienten dieser letzteren aber lassen sich algebraisch durch die Constanten der zwischen x und y bestehenden Gleichung ausdrücken. Dadurch wird es möglich die obigen transcendenten Gleichungen durch algebraische zu ersetzen.

Dieses hat Herr KÖNIGSBERGER in der erwähnten Abhandlung für den Fall $(\rho = 2, k = 2)$ ausgeführt und gezeigt, dass die schon von

---

(1) In Betreff der gebrauchten Bezeichnungen verweise ich auf die Abhandlung von KÖNIGSBERGER: *Über die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung* (BORCHARDT's Journal, B. 64, S. 17) und auch auf HENNOCH's Dissertation: *De Abelianarum functionum periodis* (Berlin 1867).

Jacobi (Crelle's Journal, B. 8) betrachteten und auf elliptische zurückgeführten Integrale

$$\int \frac{1 + \sqrt{k\lambda}\,.\,x}{\sqrt{x(1-x)(1+kx)(1+\lambda x)(1+k\lambda x)}}\,dx, \quad \int \frac{1 - \sqrt{k\lambda}\,.\,x}{\sqrt{x(1-x)(1+kx)(1+\lambda x)(1-k\lambda x)}}\,dx$$

und die aus diesen durch eine lineare Transformation hervorgehenden, die *einzigen* Abel'sche Integrale erster Ordnung und erster Gattung sind, welche sich in der angegebenen Weise auf elliptische reduciren lassen.

In der vorliegenden Arbeit habe ich nun versucht auch für den Fall, wo zwischen x, y eine Gleichung *dritten* Ranges besteht, die algebraische Relationen zu ermitteln, welche unter den Constanten dieser Gleichung stattfinden müssen, wenn unter den Integralen $\int F(x, y)\,dx$ sich solche finden sollen, die sich durch eine Transformation zweiten Grades (d. h. bei welcher $k = 2$ ist) auf elliptische zurückführen lassen.

Ich habe aber dabei einen anderen als den eben angedeuteten Weg eingeschlagen.

Herr Weierstrass hat später zu dem angeführten Satze noch eine wesentliche Ergänzung gefunden:

»Wenn aus einer Function $\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \,|\, \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$ durch irgend eine Transformation k^{ten} Grades eine andere hervorgeht, die ein Product aus einer ϑ-Function von $(\rho - 1)$ Veränderlichen und einer elliptischen ist, so kann die ursprüngliche Function stets durch eine *lineare* Transformation (bei der $k = 1$ ist) in eine andere $\vartheta(v_1', \ldots, v_\rho' \,|\, \bar{\tau}_{11}, \ldots, \bar{\tau}_{\rho\rho})$ verwandelt werden, in der

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{\mu}{k}, \quad \bar{\tau}_{13} = 0, \quad \ldots, \quad \bar{\tau}_{1\rho} = 0$$

ist, wo μ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, k-1$ bedeutet.»

Nun kann man die eben betrachteten Integrale $u_1, \ldots, u_\rho$ durch andere ersetzen, für welche an die Stelle der Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ die $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ treten; und so ergiebt sich der Satz:

»Soll unter den von einer gegebenen algebraischen Function ρ^{ten} Ranges abhängigen Integralen sich eins finden, das auf ein elliptisches reducirt werden kann, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass unter den aus derselben Function entspringenden Functionen

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho \mid \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho})$$

eine sei, für welche

$$\tau_{12} = \frac{\mu}{k}, \quad \tau_{13} = 0, \ldots, \tau_{1\rho} = 0,$$

(k eine ganze positive Zahl und $\mu = 1, 2, \ldots, k - 1$) ist.»

Ich habe nun bemerkt, dass man unter Zugrundelegung dieses Satzes die fraglichen Relationen auch ohne auf die Transformationstheorie zu recurriren erhalten kann, wenn man noch das folgende, in den Vorlesungen des Herrn Weierstrass über Abel'sche Functionen entwickelte Theorem zu Hülfe nimmt.

Es mögen $x, y, u_1, \ldots, u_\rho, \tau_{11}, \ldots, \tau_{\rho\rho}$ dieselbe Bedeutung haben wie oben, und die $u_1', \ldots, u_\rho'$ die Werthe von $u_1, \ldots, u_\rho$ an einer anderen Stelle sein. Unter den ϑ-Functionen mit den Moduln $\tau_{\alpha\beta}$ wähle man irgend zwei *ungrade*

$$\vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\lambda, \quad \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\mu$$

willkürlich aus, so hat man, wenn

$$\text{(4)} \qquad \frac{du_\alpha}{dx} = \overline{H}(x, y)_\alpha, \quad \frac{du_\alpha'}{dx'} = \overline{H}(x', y')_\alpha$$

gesetzt wird

$$\text{(5)} \qquad \left\{\frac{\vartheta(u_1 - u_1', \ldots, u_\rho - u_\rho')_\lambda}{\vartheta(u_1 - u_1', \ldots, u_\rho - u_\rho')_\mu}\right\}^2 = \sum_\alpha \frac{\vartheta_\lambda^{(\alpha)} \overline{H}(x', y')_\alpha}{\vartheta_\mu^{(\alpha)} \overline{H}(x', y')_\alpha} \cdot \sum_\alpha \frac{\vartheta_\lambda^{(\alpha)} \overline{H}(x, y)_\alpha}{\vartheta_\mu^{(\alpha)} \overline{H}(x, y)_\alpha}$$

wo $\vartheta_\lambda^{(\alpha)}, \vartheta_\mu^{(\alpha)}$ die Werthe bedeuten, die

$$\frac{\partial \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\lambda}{\partial v_\alpha}, \quad \frac{\partial \vartheta(v_1, \ldots, v_\rho)_\mu}{\partial v_\alpha}$$

für $v_1 = 0, \ldots, v_\rho = 0$ erhalten.

Dieses vorausgeschickt nehme ich nun an, es sei y eine algebraische Function dritten Ranges von x und so beschaffen, dass in einer der aus ihr entspringenden ϑ-Functionen

$$\tau_{12} = \frac{1}{2}, \quad \tau_{13} = 0$$

ist.

In diesem Falle ist

$$\vartheta(v_1, v_2, v_3) = \sum e^{\pi i\left\{n_1\left(2v_1 + n_1\tau_{11} + \frac{1}{2}n_2\right) + n_2\left(2v_2 + \frac{1}{2}n_1 + n_2\tau_{22} + n_3\tau_{23}\right) + n_3(2v_3 + n_2\tau_{23} + n_3\tau_{33})\right\}}.$$

Trennt man in dieser Summen diejenige Glieder, in welchen n_1 grade, von denen, in welchen es ungrade ist, so erhält man,

(6)
$$\begin{aligned}
\vartheta(v \mid \tau) &= \sum e^{n(2v + n\tau)\pi i} \\
\vartheta(v \mid \tau)_0 &= \sum e^{n\left[2\left(v - \frac{1}{2}\right) + n\tau\right]\pi i} \\
\vartheta(v \mid \tau)_2 &= \sum e^{\left(n + \frac{1}{2}\right)\left[2v + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right]\pi i} \\
\vartheta(v \mid \tau)_1 &= \sum e^{\left(n + \frac{1}{2}\right)\left[2\left(v - \frac{1}{2}\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\tau\right]\pi i}
\end{aligned}$$

und

$$\vartheta(v, w \mid \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33}) = \sum e^{\left\{n_1(2v + n_1\tau_{22} + n_2\tau_{23}) + n_2(2w + n_1\tau_{23} + n_2\tau_{33})\right\}\pi i}$$

setzend

(7)
$$\vartheta(v_1, v_2, v_3)$$

$$= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\vartheta(v_2, v_3 \mid \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33}) + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\vartheta\left(v_2 - \frac{1}{2}, v_3 \middle| \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33}\right).$$

Indem man die Veränderliche v_1, v_2, v_3 um halbe Perioden vermehrt und die üblichen Bezeichnungen braucht, erhält man aus dieser Gleichung die folgenden:

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_5 &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_3 + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\vartheta(v_2, v_3)_{04}\\
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{125} &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_3 - \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\vartheta(v_2, v_3)_{04}\\
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{345} &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_{04} + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\vartheta(v_2, v_3)_3\\
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{06} &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})\,\vartheta(v_2, v_3)_{04} - \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_2\vartheta(v_2, v_3)_3\\
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{46} &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_0\vartheta(v_2, v_3)_{24} + \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_1\vartheta(v_2, v_3)_{14}\\
\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{035} &= \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_0\vartheta(v_2, v_3)_{24} - \vartheta(2v_1 \mid 4\tau_{11})_1\vartheta(v_2, v_3)_{14}.
\end{aligned}
$$

Unter den vielen, unter den $\vartheta(v_1, v_2, v_3)_\lambda$ bestehenden Gleichungen giebt es auch die folgende

$$
(9)\quad
\begin{aligned}
&g_1\vartheta(v_1, v_2, v_3)_5\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{125} + g_2\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{345}\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{06}\\
&+ g_3\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{46}\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{035} + g_4\vartheta(v_1, v_2, v_3)_3\vartheta(v_1, v_2, v_3)_{123} = 0.
\end{aligned}
$$

Setzt man in dieser Gleichung

$$v_\alpha = u_\alpha - u'_\alpha$$

und wählt, was immer möglich ist, das Paar (x', y') so, dass

$$\vartheta(u_1 - u'_1,\ u_2 - u'_2,\ u_3 - u'_3)_3$$

identisch Null wird, und setzt

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
\xi_1 &= \vartheta_5^{(1)}\overline{\Pi}(x, y)_1 + \vartheta_5^{(2)}\overline{\Pi}(x, y)_2 + \vartheta_5^{(3)}\overline{\Pi}(x, y)_3\\
\xi_2 &= \vartheta_{345}^{(1)}\overline{\Pi}(x, y)_1 + \vartheta_{345}^{(2)}\overline{\Pi}(x, y)_2 + \vartheta_{345}^{(3)}\overline{\Pi}(x, y)_3\\
\xi_3 &= \vartheta_{46}^{(1)}\overline{\Pi}(x, y)_1 + \vartheta_{46}^{(2)}\overline{\Pi}(x, y)_2 + \vartheta_{46}^{(3)}\overline{\Pi}(x, y)_3\\
\xi'_1 &= \vartheta_{125}^{(1)}\overline{\Pi}(x, y)_1 + \vartheta_{125}^{(2)}\overline{\Pi}(x, y)_2 + \vartheta_{125}^{(3)}\overline{\Pi}(x, y)_3\\
\xi'_2 &= \vartheta_{06}^{(1)}\overline{\Pi}(x, y)_1 + \vartheta_{06}^{(2)}\overline{\Pi}(x, y)_2 + \vartheta_{06}^{(3)}\overline{\Pi}(x, y)_3\\
\xi'_3 &= \vartheta_{035}^{(1)}\overline{\Pi}(x, y)_1 + \vartheta_{035}^{(2)}\overline{\Pi}(x, y)_2 + \vartheta_{035}^{(3)}\overline{\Pi}(x, y)_3
\end{aligned}
$$

so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung (9)

$$h_1\sqrt{\xi_1\xi_1'} + h_2\sqrt{\xi_2\xi_2'} + h_3\sqrt{\xi_3\xi_3'} = 0 \tag{11}$$

wo h_1, h_2, h_3 Constanten bedeuten. Zugleich sind ξ_1', ξ_2', ξ_3' homogene lineare Functionen von ξ_1, ξ_2, ξ_3. Fasst man daher ξ_1, ξ_2, ξ_3 als (homogene) Coordinaten eines Punktes auf, so stellt diese Gleichung eine Curve dar. Die durch die Gleichungen

$$\xi_1 = 0,\ \xi_1' = 0,\ \xi_2 = 0,\ \xi_2' = 0,\ \xi_3 = 0,\ \xi_3' = 0$$

dargestellten Geraden, für welche, der Kürze wegen, die Buchstaben ξ_1, ξ_1', ... selbst als Bezeichnungen gewählt werden mögen, sind dann *Doppeltangenten* dieser Curve, und zwar gehören die drei Paare

$$(\xi_1,\ \xi_1'),\ (\xi_2,\ \xi_2'),\ (\xi_3,\ \xi_3')$$

einer der bekannten 63 Gruppen an, in welche die aus den 28 Doppeltangenten einer Curve 4ten Grades gebildeten Paare vertheilt werden können. (1)

Jetzt differentiire man die Gleichungen (8) nach v_1, v_2, v_3 und setze sodann $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, so erhält man

$$\vartheta_5^{(1)} = \vartheta_{125}^{(1)} = \vartheta_{06}^{(1)} = \vartheta_{345}^{(1)} = 0. \tag{12}$$

Daraus folgt, dass die vier Geraden

$$\xi_1,\ \xi_1',\ \xi_2,\ \xi_2'$$

sich in *einem* Punkte schneiden.

Nun kann man aber die Gleichung der in Rede stehenden Curve so dargestellt erhalten, dass ihre Coefficienten *rational* aus den Constanten der zwischen x, y bestehenden Gleichung zusammengesetzt sind. Denn es

---

(1) Nimmt man ein solches Paar willkürlich an und legt durch die vier Berührungspunkte desselben irgend einen Kegelschnitt, so schneidet der die Curve vierten Grades noch in 4 Punkten, in welchen dieselbe von einem zweiten Kegelschnitt berührt werden kann. Es giebt dann (ausser dem System jener beiden Doppeltangenten) *fünf* solche Kegelschnitte, für welche der jedesmalige zweite in ein System zweier Geraden zerfällt. Die so sich ergebenden fünf Paare von Geraden sind dann Doppeltangenten-Paare und bilden mit dem ursprünglichen eine der in Rede stehenden 63 Gruppen.

lassen sich stets (auf unendlich viele Weisen) drei rational aus x, y und den Constanten der genannten Gleichung zusammengesetzte Ausdrücke

$$H(x,\ y)_1,\ H(x,\ y)_2,\ H(x,\ y)_3$$

bilden, aus denen Integrale erster Gattung entspringen. Dann sind, wenn man

$$H(x,\ y)_a = X_a$$

setzt, $\overline{H}(x,\ y)_1$, $\overline{H}(x,\ y)_2$, $\overline{H}(x,\ y)_3$ und somit auch ξ_1, ξ'_1, ξ_2, ξ'_2, ξ_3, ξ'_3 homogene lineare Functionen von X_1, X_2, X_3; und es muss daher zwischen diesen Grössen eine Gleichung

$$F(X_1,\ X_2,\ X_3) = 0$$

bestehen, in welcher der Ausdruck auf der linken Seite eine homogene ganze Function 4ten Grades von X_1, X_2, X_3 ist.

Diese Gleichung lässt sich aus der gegebenen Gleichung zwischen x und y, und den beiden angenommenen

$$X_1 H(x,\ y)_2 - X_2 H(x,\ y)_1 = 0,\ X_2 H(x,\ y)_3 - X_3 H(x,\ y)_2 = 0$$

durch Elimination der Grössen x, y herstellen, und es haben also ihre Coefficienten die angegebene Beschaffenheit.

Betrachtet man nun die Grössen X_1, X_2, X_3 als (homogene) Coordinaten eines Punktes (in einer Ebene) so stellt die Gleichung

$$F = 0$$

dieselbe Curve 4ten Grades dar wie die vorstehende (11). Dabei ist jedoch folgendes zu bemerken.

Setzt man

$$\xi = \frac{H(x,\ y)_1}{H(x,\ y)_3},\ \eta = \frac{H(x,\ y)_2}{H(x,\ y)_3}$$

so müssen sich, wenn die Gleichung

$$F(\xi,\ \eta,\ 1) = 0$$

der Gleichung zwischen x, y äquivalent sein soll, mit Zuziehung der letzteren, x, y rational durch ξ, η ausdrücken lassen. Dies trifft nur

dann nicht ein, wenn sich für *jeden* Werth von ξ nur *zwei* verschiedene Werthe von η ergeben.

Schliessen wir diesen Fall, der besonders behandelt werden muss, aus, so ist also jetzt folgendes erwiesen.

»Ist y eine algebraische Function 3ten Ranges von x, so lässt sich die zwischen x und y bestehende Gleichung auf unendlich viele Arten in eine homogene Gleichung 4ten Grades $F = 0$ zwischen drei Grössen X_1, X_2, X_3, welche rationale Functionen von x, y sind transformiren und zwar kann dieses auch stets so geschehen, dass die Coefficienten dieser Gleichung so wie auch die der Ausdrücke X rational aus den Constanten der gegebenen Gleichung zusammengesetzt sind. Die Gleichung $F = 0$ ist dann im Allgemeinen — d. h. stets wenn der erwähnte Fall nicht eintritt — irreductibel und stellt eine Curve 4ten Grades ohne Doppelpunkte dar.

Unter den Doppeltangenten dieser Gleichung müssen dann vier zusammengehörige — d. h. solche deren 8 Berührungspunkte in einem Kegelschnitt liegen — geben, welche in *einem* Punkte sich schneiden, wenn unter den von y abhängenden Abel'schen Integralen sich eins finden soll, welches sich durch eine Transformation der hier betrachteten Art ($k = 2$) in ein elliptisches verwandeln lässt.»

Dieser Satz gilt aber auch umgekehrt.

Sind nämlich ξ_1, ξ'_1, ξ_2, ξ'_2 homogene lineare Functionen von X_1, X_2, X_3, welche gleich Null gesetzt die Gleichungen von irgend vier zusammengehörigen Doppeltangenten der Curve $F = 0$ geben, und man nimmt aus der durch das Paar (ξ_1, ξ'_1) bestimmten Gruppe von Doppeltangenten-Paaren noch irgend ein drittes (ξ_3, ξ'_3) so kann man bekantlich $F(X_1, X_2, X_3)$ auf die Form

$$g_1^2(\xi_1\xi'_1)^2 + g_2^2(\xi_2\xi'_2)^2 + g_3^2(\xi_3\xi'_3)^2 - 2g_2g_3(\xi_2\xi_3\xi'_2\xi'_3) - 2g_3g_1(\xi_3\xi_1\xi'_3\xi'_1)$$
$$- 2g_1g_2(\xi_1\xi_2\xi'_1\xi'_2)$$

bringen, wo g_1, g_2, g_3 Constanten bedeuten, von denen keine gleich Null ist.

Man hat also

$$F(X_1, X_2, X_3) = (g_3\xi_3\xi'_3 - g_2\xi_2\xi'_2 - g_1\xi_1\xi'_1)^2 - 4g_1g_2\xi_1\xi_2\xi'_1\xi'_2.$$

Schneiden sich nun die vier Graden $(\xi_1, \xi_2, \xi_1', \xi_2')$ in einem Punkte, und mögen p, q irgend zwei homogene lineare Functionen von X_1, X_2, X_3 sein, welche in demselben Punkte sich verschneiden, so sind ξ_1, ξ_2, ξ_1', ξ_2' sämmtlich homogene lineare Functionen von p, q, und es wird, wenn man noch ξ_3' durch ξ_1, ξ_2, ξ_3 ausdrückt

$$g_3\xi_3\xi_3' - g_1\xi_1\xi_1' - g_2\xi_2\xi_2' = l\xi_3^2 + (p, q)_1\xi_3 + (p, q)_2$$

wo l constant, und $(p, q)_1$, $(p, q)_2$ ganze homogene Functionen von p, q beziehlich vom 1ten und 2ten Grade sind.

Setzt man daher

$$r = h\left(\xi_3 + \frac{1}{2}\frac{(p, q)_1}{l}\right)$$

unter h eine beliebige Constante verstehend, so ergiebt sich

$$F(X_1, X_2, X_3) = R_0 r^4 + 2R_2(p, q)r^2 + R_4(p, q)$$

wo R_0 constant und von Null verschieden,(¹) und R_2, R_4 ganze homogene Functionen von p, q beziehlich des 2ten und 4ten Grades sind.

Nimmt man h so an, dass die Determinante von p, q, r gleich 1 wird und bezeichnet den Ausdruck auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung mit $G(p, q, r)$, so ist bekanntlich, unter der Voraussetzung, dass für X_1, X_2, X_3 deren Ausdrücke in x, y gesetzt werden, so dass $F = 0$ ist

$$\frac{X_2dX_3 - X_3dX_2}{\frac{\partial F}{\partial X_1}} = \frac{X_3dX_1 - X_1dX_3}{\frac{\partial F}{\partial X_2}} = \frac{X_1dX_2 - X_2dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}$$

$$= \frac{qdr - rdq}{\frac{\partial G}{\partial p}} = \frac{rdp - pdr}{\frac{\partial G}{\partial q}} = \frac{pdq - qdp}{\frac{\partial G}{\partial r}}.$$

(¹) Wäre R_0 gleich Null, so würde der Durchschnittspunkt der Doppeltangenten auf der Curve liegen, was bei einer Curve 4ten Grades ohne Doppelpunkte (und nur für eine solche ist $\rho = 3$) nicht der Fall sein kann.

Es ist aber

$$\frac{\partial G}{\partial r} = 4r[R_0 r^2 + R_2(p, q)]$$

$$[R_0 r^2 + R_2(p, q)]^2 = R_2^2(p, q) - R_4(p, q).$$

Man hat also

$$\frac{p dq - q dp}{4[R_0 r^2 + R_2(p, q)]} = r \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}} = \ldots$$

oder wenn man

$$\xi = \frac{q}{r}, \; R(\xi) = R_2^2(1, \xi) - R_4(1, \xi)$$

$$r = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$$

setzt

$$\int \frac{c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3}{\frac{\partial F}{\partial X_3}} (X_1 dX_2 - X_2 dX_1) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$

wobei zu bemerken ist, dass

$$\sqrt{R(\xi)} = R_0 \frac{r^2}{p^2} + \frac{R_2(p, q)}{p^2}$$

so dass entsprechend dem in der Einleitung bemerkten

$$\xi \text{ und } \sqrt{R(\xi)}$$

beide rational durch x, y ausdrückbar sind.

Bemerkt man noch, dass, wenn $G(p, q, r)$ die angegebene Form hat, in dem Punkte ($p = 0$, $q = 0$) sich auch stets 4 zusammengehörige Doppeltangenten der durch die Gleichung $F = 0$ dargestellten Curve schneiden, so kann man jetzt sagen:

»Damit die Gleichung zwischen x, y die in Rede stehende Beschaffenheit habe, ist *nothwendig* und *hinreichend*, dass die aus ihr hervorgehende Gleichung 4ten Grades

$$F(X_1, X_2, X_3) = 0$$

sich durch eine lineare Transformation in eine andere

$$G(p, q, r) = 0$$

überführen liesse, in welcher nur die *graden* Potenzen der Veränderlichen r vorkommen, was identisch damit ist, dass sich 4 zusammengehörige Doppeltangenten der durch die Gleichung $F = 0$ dargestellten Curve 4ten Grades in *einem* Punkte schneiden. Damit aber das letztere stattfinde, müssen unter den Coefficienten von F zwei bestimmte algebraische Relationen bestehen, welche dann auch in ebensolche Relationen zwischen den Constanten der Gleichung zwischen x und y verwandelt werden können. Wenn die Umformung von F in G ausgeführt ist, so ist zugleich dasjenige von y abhängige Integral erster Gattung, welches in ein elliptisches transformirt werden kann, bestimmt und diese Transformation selbst sofort ausführbar.»

Es fragt sich nun, ob es noch andere von y abhängende Integrale erster Gattung giebt, welche ebenfalls durch eine Transformation zweiten Grades ($k = 2$) auf elliptische zurückgeführt werden können. Um dies zu entscheiden, hat man nach dem Vorstehenden zu untersuchen, ob sich die Function $G(p, q, r)$ durch eine lineare Transformation in eine andere $G_1(p_1, q_1, r_1)$ von derselben Gestalt so verwandeln lässt, dass r_1 und r verschieden (und auch $\frac{r_1}{r}$ nicht constant) ist.

Wir wollen dabei wieder X_1, X_2, X_3 als Coordinaten auffassen, so dass auch $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, $r_1 = 0$ ebenso wie $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ die Gleichungen bestimmter graden Linien sind.

Angenommen nun, es bestehe die Gleichung

$$G(p, q, r) = G_1(p_1, q_1, r_1)$$

für beliebige Werthe von X_1, X_2, X_3 und in G kommen nur die graden Potenzen von r, in G_1 nur die graden Potenzen von r_1 vor. Der Durchschnittspunkt der Graden (p, q) werde mit a, der von (p_1, q_1) mit b und der von (r, r_1) mit c bezeichnet.

Es ändert G seine Form nicht, wenn man statt p, q zwei andere lineare Functionen von X_1, X_2, X_3 wählt, die so beschaffen sind, dass die ihnen entsprechenden graden Linien sich ebenfalls in a schneiden. Ebenso

bleibt G_1 von derselben Form, wenn man statt p_1, q_1 zwei andere Functionen wählt, deren entsprechende Linien durch b gehen.

Ich nehme zunächst an, dass der Punkt a nicht auf der Linie r_1 liege und wähle die Functionen p, q, p_1, q_1 so, dass die Linie q mit der Linie q_1 zusammenfällt und durch die Punkte (a, b), p durch die Punkte (a, c) und p_1 durch die Punkte (b, c) geht, und daher, unter α, β, γ, δ, ε Constanten verstehend

$$p = \alpha r_1 + \beta p_1$$

$$q = \gamma q_1$$

$$r = \delta r_1 + \varepsilon p_1$$

setzen kann, oder auch da durch die angegebenen Bestimmungen nur die Verhältnisse der Coefficienten der Functionen p, q, p_1, q_1 festgesetzt werden, so dass

$$p = r_1 + \beta p_1$$

$$r = r_1 + p_1$$

$$q = q_1.$$

Nun sei

$$G(p, q, r) = r^4 + (L_1 p^2 + L_2 pq + L_3 q^2) r^2 + M_1 p^4 + M_2 p^3 q + M_3 p^2 q^2 + M_4 pq^3 + M_5 q^4,$$

so müssen, damit durch die angegebene Substitution sich G in eine Function verwandle, in der nur grade Potenzen von r_1 vorkommen, die folgenden Gleichungen bestehen

$$4 + 2L_1(\beta + 1) + 4M_1\beta = 0$$

$$L_2 + M_2 = 0$$

$$4 + 2L_1\beta(\beta + 1) + 4M_1\beta^3 = 0$$

$$L_2(2\beta + 1) + 3M_2\beta^2 = 0$$

$$2L_3 + 2M_3\beta = 0$$

$$M_4 = 0.$$

Diese Gleichungen können auf doppelte Weise befriedigt werden.

A) Wenn L_2, M_2, M_4 nicht alle drei gleich Null sind, so muss

$$\beta = -\frac{1}{3},\ L_1 = 6,\ M_1 = 9,\ M_2 = -L_2,\ M_3 = L_3,\ M_4 = 0$$

sein, also G die Gestalt

$$r^4 + (6p^2 + L_2pq + L_3q^2)r^2 + 9p^4 - L_2p^3q + L_3p^2q^2 + M_5q^4 = 0$$

haben. Dann wird

$$G_1 = 16\Big\{r_1^4 + r_1^2\Big[6\Big(\frac{1}{3}p_1\Big)^2 + L_2\Big(\frac{1}{3}p_1\cdot\frac{1}{2}q_1\Big) + L_3\Big(\frac{1}{2}q_1\Big)^2\Big]$$

$$+ 9\Big(\frac{1}{3}p_1\Big)^4 - L_2\Big(\frac{1}{3}p_1\Big)^3\Big(\frac{1}{2}q_1\Big) + L_3\Big(\frac{1}{3}p_1\Big)^2\Big(\frac{1}{2}q_1\Big)^2 + M_5\Big(\frac{1}{2}q_1\Big)^4\Big\}$$

woraus zu ersehen ist, dass in diesem Falle die beiden Integrale

$$\int\frac{r(X_1dX_2 - X_2dX_1)}{\frac{\partial F}{\partial X_3}},\quad \int\frac{r_1(X_1dX_2 - X_2dX_1)}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}$$

in elliptische verwandelt werden können, in denen die Function $R(\xi)$ dieselbe ist.

Es ergiebt sich ferner, dass dies auch mit dem Integrale

$$\int\frac{(r - r_1)(X_1dX_2 - X_2dX_1)}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}$$

der Fall ist, es aber ausser diesen dreien kein anderes Integral erster Gattung giebt, welches auf die hier betrachtete Weise in ein elliptisches transformirt werden könnte.

B) Wenn L_2 und somit auch $M_2 = 0$ ist so ergiebt sich

$$L_1 = -\frac{2}{\beta}, \qquad M_1 = \frac{1}{\beta^2}$$

$$L_2 = 0, \qquad M_2 = 0$$

$$L_3 = -\beta M_3, \quad M_4 = 0$$

und es können dann β, M_3, M_5 willkürlich angenommen werden.

Es ist also

$$G = \frac{1}{\beta^2}p^4 + M_5 q^4 + r^4 - \beta M_3 q^2 r^2 - \frac{2}{\beta} r^2 p^2 + M_3 p^2 q^2.$$

In diesem Falle giebt es also drei linear von einander unabhängige Integrale erster Gattung, die sich auf elliptische Integrale reduciren lassen.

Es ist hierbei stillschweigend angenommen, dass die Punkte a, b, c nicht in grader Linie liegen (also auch a, b nicht zusammenfallen können). Dies ist aber gerechtfertigt. Zuerst ist klar, dass weder 0 und a, noch c und b zusammenfallen können, weil sonst p, q, r im ersten und p_1, q_1, r_1 im zweiten nicht von einander unabhängig wären. Lägen nun a, b, c in einer graden Linie so könnte man die Graden q, q_1 mit dieser zusammenfallen lassen, und die Functionen r_1, q_1, p_1, p, q so bestimmen, dass man

$$q = q_1 = r - r_1 = p - p_1$$

hätte, d. h.

$$r = r_1 + q_1$$

$$q = q_1$$

$$p = p_1 + q_1.$$

Dann aber würden in G die Coefficienten von r_1^3 nicht verschwinden.

Aus den Gleichungen

$$r = r_1 + p_1, \; p = r_1 + \beta p_1, \; q = q_1$$

oder

$$p_1 = \frac{r - p}{1 - \beta}, \; q_1 = q, \; r_1 = \frac{p - \beta r}{1 - \beta}$$

folgt, dass in dem Punkte b, wo $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, nicht auch $r = 0$ sein kann weil sonst auch in diesem Punkte $p = 0$, $q = 0$ sein, also b mit c zusammenfallen würden. Daraus folgt sofort, wenn r, r_1 mit einander vertauscht werden, dass auch der Punkt a niemals ein Punkt von r_1 sein kann, wenn b nicht in der Linie r liegt.

Es bleibt hiernach nur noch der Fall zu betrachten, wo a in r_1 und zugleich b in r liegt.

Dann kann man

Die Linien q, q_1 durch a, b
» » p durch a, c
» » p_1 durch b, c

gehen lassen, und

$$p = r_1, \; q = q_1, \; r = p_1$$

annehmen. Dadurch geht G in

$$p_1^4 + (L_1 r_1^2 + L_2 r_1 q_1 + L_3 q_1^2) p_1^2 + M_1 r_1^4 + M_2 r_1^3 q_1 + M_3 r_1^2 q_1^2 + M_4 r_1 q_1^3 + M_5 q_1^4$$

über. Es muss also

$$L_2 = 0, \; M_2 = 0, \; M_4 = 0 \text{ sein; d. h. es muss}$$

$G(p, q, r)$ eine ganze homogene Function zweiten Grades von p^2, q^2, r^2 sein.

In diesem Falle giebt es also *drei* von einander unabhängige Integrale erster Gattung, die in elliptische Integrale transformirt werden können.

Der oben betrachtete Fall (**B**) ist unter diesem mitbegriffen; er zeichnet sich aber dadurch aus, dass wenn er statt findet, ausser den Integralen

$$\int p \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}, \quad \int q \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}, \quad \int r \frac{X_1 dX_2 - X_2 dX_1}{\frac{\partial F}{\partial X_3}}$$

noch ein viertes sich auf ein elliptisches zurückführen lässt. Es tritt ein, wenn $F(X_1, X_2, X_3)$ durch eine lineare Transformation in der Art auf die Form

$$r^4 + (L_1 p^2 + L_3 q^2) r^2 + M_1 p^4 + M_3 p^2 q^2 + M_5 q^4$$

gebracht werden kann, dass unter den Coefficienten die Relationen

$$L_1^2 = 4M_1, \; L_1 L_3 = 2M_3$$

statt finden; das vierte Integral ist dann dasjenige, wo an die Stelle von r

$$\frac{r-\beta p}{1-\beta} \quad \left(\beta = -\frac{2}{L_1}\right)$$

tritt.

Ich habe auch den oben ausgeschlossenen Fall untersucht. Wenn er eintritt, so lässt sich jedes Integral erster Gattung zunächst in ein *hyperelliptisches*

$$\int \frac{c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2}{\sqrt{R(\xi)}} d\xi$$

transformiren, wo $R(\xi)$ eine ganze Function 8ten Grades von ξ bedeutet.

Ich begnüge mich hier die Resultate anzuführen.

1. Bezeichnet man mit $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ die 8 Werthe von ξ für welche $R(\xi)$ verschwindet, so können dieselben, in dem Falle wo eins der vorstehenden Integrale sich auf ein elliptisches reducirt, so geordnet werden, dass unter ihnen die beiden Gleichungen

$$1 = \frac{(a_0-a_1)(a_2-a_7)(a_3-a_4)(a_5-a_6)}{(a_0-a_7)(a_1-a_2)(a_3-a_6)(a_4-a_5)}$$

$$1 = \frac{(a_0-a_5)(a_1-a_0)(a_2-a_3)(a_4-a_7)}{(a_0-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_5)(a_6-a_7)}$$

statt finden.

2. Wird aber ausser diesen Gleichungen noch die folgende

$$1 = \frac{(a_0-a_4)(a_1-a_3)(a_2-a_6)(a_5-a_7)}{(a_0-a_6)(a_1-a_5)(a_2-a_4)(a_3-a_7)}$$

erfüllt, so lassen sich drei von einander unabhängige Integrale erster Gattung in der angegebenen Weise in elliptische verwandeln.

Schliesslich bemerke ich, dass der Zweck meiner Arbeit weniger die Herleitung der ermittelten Resultate — denn diese würden sich wenn es nur auf sie angekommen wäre, viel kürzer rein algebraisch ergeben haben — gewesen ist; es sollte vielmehr ein Beispiel zu der in der Einleitung auseinandergesetzten Theorien meines verehrten Lehrers, welche durchzuführen derselbe mich aufgefordert hat, gegeben und der Fall, wo $\rho = 3$, $k = 2$ ist, *vollständig* behandelt werden.

ZU EULERS RECURSIONSFORMEL FÜR DIE DIVISORENSUMMEN.

Aus einer Zuschrift an den Herausgeber

VON

CHR. ZELLER
in MARKGRÖNINGEN.

...... Um eine kleine Gegengabe zu bieten, sende ich eine Formel, auf welche ich gekommen bin bei Beschäftigung mit Euler, *de partitione numerorum* (Introductio in analysin infinitorum, cap. XVI) und mit seinem Ausdruck für *Divisorensummen*:

$$\int(n) = \int(n-1) + \int(n-2) - \int(n-5) - \int(n-7) + \int(n-12) + \int(n-15) \ldots$$

wo $\int(n)$ die Summe der Divisoren von n incl. 1 und n bezeichnet und für $\int(n-n)$ die Zahl n selbst gesetzt wird.

Bedeutet ferner (n) die Anzahl der Zusammensetzungen von n aus allen ganzen Zahlen nach Eulers Tab. u. art. 324, dann gilt hier die Recursionsformel

$$(n) = (n-1) + (n-2) - (n-5) - (n-7) + (n-12) + (n-15) \ldots$$

(wobei anstatt $(n-n)$ die Zahl 1 zu setzen ist) welche mit der ersteren die grösste Ähnlichkeit hat. Man könnte erwarten, dass beide Formeln identische Werthe liefern, da sie demselben Recursionsgesetze folgen und von denselben ersten Werthen ausgehen, aber die Pentagonalzahlen begründen einen Unterschied, da für diese das einemal bei $\int(n-n)$ oder $\int(0)$ nach Eulers Regel die Zahl n, das andremal für $(n-n)$ die Einheit zu setzen ist.

Von hier aus liess sich weiter ableiten, dass

$$\int(n) = 1(n-1) + 2(n-2) - 5(n-5) - 7(n-7) + 12(n-12) + 15(n-15)\ldots$$

so dass also die Summe der Divisoren auch als eine Function der Partitionen erscheint und mit diesen durch ein gleichfalls pentagonales Recursionsgesetz zusammenhängt.

Ist dieser Ausdruck auch für die Berechnung selbst nicht zu brauchen, so ist er doch vielleicht geeignet, jene merkwürdige Formel Eulers, mit welcher auch Jacobi sich beschäftigt hat (Opera, T. 1, p. 345), in ein neues Licht zu stellen.

Beispiel:

Es ist für

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\int(n) =$	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31	18
$(n) =$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297

wie sich aus Euler ct. art. 324 ergiebt; also nach den obigen Formeln:

$$\int(18) = \int(17) + \int(16) - \int(13) - \int(11) + \int(6) + \int(3)$$

$$= 18 + 31 - 14 - 12 + 12 + 4 = 39$$

$$(18) = (17) + (16) - (13) - (11) + (6) + (3)$$

$$= 297 + 231 - 101 - 56 + 11 + 3 = 385$$

$$\int(18) = 1.297 + 2.231 - 5.101 - 7.56 + 12.11 + 15.3$$

$$= 936 - 897 = 39 = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18.$$

Markgröningen, 23 Juni 1884.